

UNIVERSITÀ DEL SALENTO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA
“ENNIO DE GIORGI”

Michele Carriero
Luca Anzilli

Introduzione alle
Equazioni a Derivate Parziali Lineari



Quaderno 1/2015
Università del Salento - Coordinamento SIBA

QUADERNI DI MATEMATICA

Una pubblicazione a cura del
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA “ENNIO DE GIORGI”
UNIVERSITÀ DEL SALENTO

Comitato di Redazione

Angela Albanese
Francesco Catino
Domenico Perrone

I QUADERNI del Dipartimento di Matematica e Fisica “Ennio De Giorgi” della Università del Salento documentano gli aspetti di rilievo dell’attività di ricerca e didattica del Dipartimento. Nei Quaderni sono pubblicati articoli di carattere matematico che siano:

- (1) lavori di rassegna e monografie su argomenti di ricerca;
- (2) testi di seminari di interesse generale, tenuti da docenti o ricercatori del Dipartimento o esterni;
- (3) lavori di specifico interesse didattico.

La pubblicazione dei lavori è soggetta all’approvazione del Comitato di Redazione, che decide tenendo conto del parere di un *referee*, nominato di volta in volta sulla base delle competenze specifiche.

Quaderno 1/2015: e-ISBN 978–88–8305–110–4

Università del Salento - Coordinamento SIBA

Prefazione

Questi appunti sono una versione ampliata delle lezioni tenute da Michele Carriero sulle Equazioni a Derivate Parziali Lineari per gli Studenti dei Corsi di Studio in Matematica dell'Università del Salento.

L'intento principale è quello di introdurre gli Studenti alle Equazioni a Derivate Parziali Lineari attraverso una trattazione-guida che renda più accessibile lo studio e l'approfondimento successivo in testi avanzati esistenti in letteratura. La presentazione riflette lo stile delle lezioni; non vi è la pretesa di aver esposto l'argomento in modo esaustivo né originale, ma si è mirato soprattutto ad evidenziare casi modello significativi.

Il secondo autore è uno dei partecipanti al Corso nell'a.a. 1990/91 e ha illustrato un problema di rilevante interesse nell'ambito della finanza matematica; a lui va riconosciuto l'impegno per la cura di questa versione, a partire dagli appunti delle lezioni tenute in diversi anni.

Lecce, febbraio 2015

Michele Carriero

Dipartimento di Matematica e Fisica
"Ennio De Giorgi"
michele.carriero@unisalento.it

Luca Anzilli

Dipartimento di Scienze dell'Economia
luca.anzilli@unisalento.it

Gli autori ringraziano il Referee per gli utili commenti.

Indice

1	Preliminari	9
1.1	Notazione e premesse	9
1.2	Misura di Lebesgue in \mathbb{R}^N	11
1.3	Funzioni misurabili	12
1.4	Integrale di Lebesgue	13
1.5	Alcuni teoremi fondamentali	14
1.6	Teorema di compattezza (di Ascoli - Arzelà)	16
1.7	Operatore Divergenza, Operatore Gradiente e Operatore di Laplace	18
1.8	Misura di Hausdorff	18
1.9	Teorema della divergenza in \mathbb{R}^N (Gauss-Green)	19
1.10	Le identità di Green	20
1.11	Un criterio di sommabilità	20
2	Elementi della teoria (matematica) del potenziale (scalare): l'equazione di Laplace, di Poisson e problemi connessi	23
2.1	Funzioni armoniche in Ω	23
2.2	Funzioni subarmoniche e superarmoniche in Ω	25
2.3	Principio del massimo (minimo) forte e debole	26
2.4	Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson (o per l'equazione di Laplace nel caso omogeneo, $f \equiv 0$)	28
2.5	Soluzione fondamentale per l'operatore di Laplace	29
2.6	Rappresentazione di Green	30
2.7	Funzione di Green	31
2.8	"Caratterizzazione" delle funzioni armoniche	35
2.9	Limite uniforme di successioni di funzioni armoniche	36
2.10	Sul concetto di problema ben posto secondo Hadamard e Principio di riflessione di Schwarz	36
2.11	Disuguaglianza di Harnack per funzioni armoniche positive	39
2.12	Stima (interna) a priori del gradiente di una funzione armonica	42
2.13	Il Problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace: Il metodo delle funzioni subarmoniche (<i>di O. Perron</i>)	43
2.14	Potenziale Newtoniano e problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson	50
3	Elementi di Teoria delle Distribuzioni (Laurent Schwartz)	59
3.1	Distribuzioni	59
3.2	Esempi di distribuzioni	61

3.3	Derivate di una distribuzione e Teorema di Malgrange-Ehrenpreis . . .	63
4	Spazi (di Lebesgue) $L^p(\Omega)$	67
4.1	Definizione e proprietà elementari degli spazi $L^p(\Omega)$	67
4.2	Disuguaglianza di Hölder	69
4.3	Immersione continua $L^s(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$	72
4.4	Disuguaglianza di interpolazione	73
4.5	Teorema di completezza di Fisher-Riesz	75
5	Convoluzione e Regolarizzazione per convoluzione	77
5.1	Convoluzione e Regolarizzazione per convoluzione	77
5.2	Successioni regolarizzanti	82
5.3	Approssimazione dell'identità	82
5.4	Densità di $C_0^\infty(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq +\infty$)	84
5.5	Prodotto di convoluzione di due distribuzioni	87
6	Spazi di Hilbert (reali)	93
6.1	Spazi di Hilbert (reali)	93
6.2	Proiezione su un convesso chiuso	94
6.3	Duale di uno spazio di Hilbert. Teorema di rappresentazione di Riesz-Fréchet	98
6.4	Teoremi di Stampacchia e di Lax-Milgram	100
7	Introduzione agli Spazi di Sobolev	103
7.1	Spazi di Sobolev	103
7.2	Disuguaglianze di Sobolev in $W^{1,p}(\Omega)$ (teoremi di immersione continua o compatta)	107
7.3	Disuguaglianze di Sobolev in $W_0^{1,p}(\Omega)$	108
7.4	Disuguaglianze di Poincaré	115
8	Principio di Dirichlet	117
8.1	Principio di Dirichlet	117
8.2	Obiezione (generale) di Weierstrass	117
8.3	Obiezione di Courant	118
8.4	Obiezione (specificata) di Hadamard	119
8.5	Principio di Dirichlet in $W^{1,2}(\Omega)$: esistenza e regolarità interna . . .	121
9	Metodo variazionale per operatori in forma di divergenza: teoria L^2	129
9.1	Il metodo variazionale per operatori in forma di divergenza: una introduzione	129
9.2	Problema di Dirichlet omogeneo per l'equazione di Poisson	129
9.3	Operatori in forma di divergenza	131
9.4	Problema di Dirichlet non-omogeneo per l'equazione di Poisson . . .	135
10	La trasformata di Fourier	137
10.1	La trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^N)$	137
10.2	La classe di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (delle funzioni a decrescenza rapida all'infinito)	138
10.3	La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^N)$	144
10.4	Distribuzioni temperate	146

11	L'equazione del calore e alcuni problemi connessi	151
11.1	Il Problema di Cauchy per l'equazione del calore in \mathbb{R}^N	151
11.2	Soluzione fondamentale per l'operatore del calore	157
11.3	Questioni di unicità della soluzione del Problema di Cauchy per l'equazione del calore	159
11.4	Il Principio del massimo (minimo) debole e unicità, in aperti connessi limitati	160
11.5	Il Principio del massimo in \mathbb{R}^N	166
11.6	Il Problema di Cauchy non-omogeneo per l'equazione del calore: Principio di Duhamel	169
11.7	Metodi dell'integrale dell'energia	176
11.8	Un'applicazione dell'equazione del calore ad un problema di finanza matematica	178
12	L'equazione delle onde (o di d'Alembert) e alcuni problemi connessi	187
12.1	Il Problema di Cauchy per l'equazione delle onde unidimensionale	187
12.2	I movimenti di una corda con gli estremi fissi	190
12.3	Equipartizione dell'energia	191
12.4	Medie sferiche ed Equazione di Darboux	193
12.5	Metodo di Poisson delle medie sferiche ed equazione di Eulero-Poisson-Darboux	194
12.6	Il Problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione (spaziale) $N = 3$	196
12.7	Il Problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione (spaziale) $N = 2$ (Metodo della discesa di Hadamard)	199
12.8	Il Problema di Cauchy non-omogeneo per l'equazione delle onde: Principio di Duhamel	201
12.9	Metodi dell'integrale dell'energia	202
	Bibliografia	205
	Indice analitico	207

CAPITOLO 1

Preliminari

1.1 Notazione e premesse

$N \geq 2$ intero positivo;
 \mathbb{R}^N spazio Euclideo N -dimensionale;
 Ω aperto connesso non vuoto di \mathbb{R}^N ;
 $\overline{\Omega}$ chiusura topologica di Ω ;
 $\partial\Omega$ frontiera topologica di Ω ;

$$|x - y| = \left[\sum_{j=1}^N (x_j - y_j)^2 \right]^{1/2}$$

distanza euclidea tra $x = (x_1, \dots, x_N)$ e $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$;

se $x \in \mathbb{R}^N$ e $E, F \subset \mathbb{R}^N$ si definisce

$$d(x, E) = \inf\{|x - y|; y \in E\} \quad (\text{distanza di } x \text{ da } E),$$

$$\text{dist}(E, F) = \inf\{|x - y|; x \in E, y \in F\} \quad (\text{distanza tra } E \text{ e } F),$$

$$\text{diam } E = \sup\{|x - y|; x, y \in E\} \quad (\text{diametro di } E);$$

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^N x_j y_j \quad \text{prodotto scalare di } x \text{ per } y;$$

$$|x| = (x \cdot x)^{1/2} \quad \text{norma di } x;$$

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^N; |y - x| < r\} \quad \text{palla aperta di centro } x \text{ e raggio } r > 0;$$

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^N; |y - x| \leq r\} \quad \text{palla chiusa di centro } x \text{ e raggio } r > 0;$$

$$\partial B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^N; |y - x| = r\} \quad \text{sfera di centro } x \text{ e raggio } r > 0;$$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$;
 $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$;
 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$ multi-indice;
 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$ lunghezza del multi-indice α ;
 $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_N!$;
 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_N^{\alpha_N} \quad \forall x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$;

si denoterà indifferentemente con ∂_{x_j} , ∂_j , $\frac{\partial}{\partial x_j}$ la derivata parziale rispetto alla j -esima componente di $x \in \mathbb{R}^N$;

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_N}^{\alpha_N}};$$

$C^0(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continue in Ω ;
 $C^k(\Omega)$, per $k = 1, 2, \dots, \infty$, è lo spazio delle funzioni $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tali che esiste $D^\alpha u \in C^0(\Omega)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ con $0 \leq |\alpha| \leq k$;
 $C^0(\overline{\Omega})$ è lo spazio delle funzioni continue in Ω che hanno un prolungamento continuo a $\overline{\Omega}$, i.e.

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \in \Omega}} u(x) = u(\xi) \quad \forall \xi \in \partial\Omega;$$

analogamente si definisce $C^k(\overline{\Omega})$ per $k = 1, 2, \dots, \infty$;

si definisce supporto di $u \in C^0(\Omega)$:

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}};$$

$C_0^0(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni continue in Ω a supporto compatto contenuto in Ω ;
 analogamente si definisce $C_0^k(\Omega)$.

Inoltre

$$u = (u_1, \dots, u_m) \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^m) \iff u_j \in C^k(\Omega) \quad \forall j = 1, 2, \dots, m,$$

e analoga notazione si userà per gli altri spazi funzionali i cui elementi siano funzioni vettoriali.

Sia $0 < \alpha \leq 1$. $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ è lo spazio delle funzioni hölderiane in Ω con esponente α , cioè lo spazio delle funzioni $u \in C^0(\overline{\Omega})$ tali che

$$\exists c > 0 \text{ per cui } |u(x') - u(x'')| \leq c |x' - x''|^\alpha \quad \forall x', x'' \in \Omega;$$

per $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ si ha

$$[u]_{0,\alpha} = \sup_{\substack{x', x'' \in \Omega \\ x' \neq x''}} \frac{|u(x') - u(x'')|}{|x' - x''|^\alpha} \leq c < +\infty$$

$([u]_{0,\alpha})$ si chiama modulo di α -hölderianità di u .

Esempio: $\Omega = B_1(0)$, $u(x) = |x|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$.

$C^{0,1}(\overline{\Omega})$ è lo spazio delle funzioni lipschitziane in Ω ;

$$u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \iff \forall \beta \in \mathbb{N}_0^N, 0 \leq |\beta| < k, \quad D^\beta u \in C^0(\overline{\Omega}) \wedge D^k u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Esempio di funzione di classe $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$:

$$\rho : x \in \mathbb{R}^N \mapsto \rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

$$\text{supp } \rho = \overline{B}_1(0).$$

Infatti $\rho(x) = v(|x|^2 - 1)$ dove

$$v(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}} & \text{se } t < 0 \\ 0 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{e } v \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

1.2 Misura di Lebesgue in \mathbb{R}^N

Definizione 1.2.1. Una famiglia \mathcal{F} di sottoinsiemi di \mathbb{R}^N si chiama σ -algebra se

- (i) $\emptyset, \mathbb{R}^N \in \mathcal{F}$,
- (ii) $E \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{R}^N \setminus E \in \mathcal{F}$,
- (iii) se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ allora $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{F}$.

Il seguente teorema indica l'esistenza in \mathbb{R}^N di una σ -algebra \mathcal{M} e di una misura su \mathcal{M} , con le caratteristiche richieste sopra.

Teorema 1.2.2. In \mathbb{R}^N esiste una σ -algebra \mathcal{M} e una misura

$$|\cdot| : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$$

con le seguenti proprietà:

- (i) ogni sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^N , e quindi ogni sottoinsieme chiuso, appartiene a \mathcal{M} ;
- (ii) se $\Omega \in \mathcal{M}$ e ha misura nulla allora ogni sottoinsieme di Ω appartiene a \mathcal{M} e ha misura nulla;
- (iii) se $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N; a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ allora $|\Omega| = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i)$;
- (iv) se $(\Omega_n) \subset \mathcal{M}$ e gli insiemi Ω_n sono a due a due disgiunti, allora

$$\left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n \right| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\Omega_n|$$

(proprietà di σ -additività o additività numerabile).

Osservazione 1.2.3. Gli insiemi appartenenti alla σ -algebra \mathcal{M} sono gli insiemi *misurabili secondo Lebesgue* e la misura $|\cdot|$, denotata anche con $\mathcal{L}^N(\cdot)$, si chiama *misura di Lebesgue N -dimensionale*.

Nel seguito porremo $\omega_N = |B_1(0)|$ e quindi

$$\omega_N r^N = |B_r(0)|, \quad N\omega_N r^{N-1} = |\partial B_r(0)|.$$

Osservazione 1.2.4. Esempi di insiemi aventi misura di Lebesgue nulla sono i seguenti:

- (i) in \mathbb{R} , l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali e in generale tutti gli insiemi costituiti da una infinità numerabile di punti;
- (ii) in \mathbb{R}^2 , rette e archi di curva regolari;
- (iii) in \mathbb{R}^3 , rette, piani e loro sottoinsiemi, curve e superfici regolari.

Osservazione 1.2.5. Si dice che una proprietà vale *quasi ovunque* in $\Omega \in \mathcal{M}$, o in forma abbreviata q.o. in Ω , se è vera in tutti i punti di Ω tranne che in un sottoinsieme avente misura di Lebesgue nulla.

1.3 Funzioni misurabili

Definizione 1.3.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile. Una funzione $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si dice misurabile se $u^{-1}(C)$ è misurabile per ogni sottoinsieme chiuso $C \subset \mathbb{R}$.

Osservazione 1.3.2. Valgono le seguenti proprietà:

- (i) se u è una funzione continua allora u è misurabile;
- (ii) somma e prodotto di funzioni misurabili sono misurabili;
- (iii) massimo limite, minimo limite e limiti puntuali di successioni di funzioni misurabili sono misurabili.

Definizione 1.3.3. Sia $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile. L'*estremo superiore essenziale* di u è così definito:

$$\sup \text{ess } u := \inf \{c \in \mathbb{R}; u \leq c \text{ q.o. in } \Omega\}.$$

Osservazione 1.3.4. Se $u = \chi_{\mathbb{Q}}$, la funzione caratteristica dei razionali, si ha $\sup u = 1$ ma $\sup \text{ess } u = 0$, essendo $|\mathbb{Q}| = 0$.

Definizione 1.3.5. Una funzione misurabile $s : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ si dice funzione *semplice* se assume un numero finito di valori a_1, a_2, \dots, a_k .

Se s è una funzione semplice che assume i valori a_1, a_2, \dots, a_k sugli insiemi misurabili e a due a due disgiunti $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ contenuti in Ω , possiamo scrivere

$$s = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{\Omega_i}.$$

Teorema 1.3.6. Se $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione misurabile allora esiste una successione (s_n) di funzioni semplici convergente ad u in ogni punto di Ω .

Inoltre, se u è non negativa, si può scegliere (s_n) monotona crescente in Ω .

1.4 Integrale di Lebesgue

Introduciamo ora la definizione di integrale di Lebesgue per una funzione misurabile

$$u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

con Ω insieme misurabile.

Per una funzione semplice s si definisce

$$\int_{\Omega} s(x) d\mathcal{L}^N(x) := \sum_{i=1}^k a_i |\Omega_i|$$

con la convenzione che se $a_i = 0$ e $|\Omega_i| = +\infty$ allora $a_i |\Omega_i| = 0$.

Per $u \geq 0$ misurabile, definiamo

$$\int_{\Omega} u(x) d\mathcal{L}^N(x) := \sup \int_{\Omega} s(x) d\mathcal{L}^N(x)$$

dove l'estremo superiore è calcolato al variare di s tra tutte le funzioni semplici minori o uguali a u su Ω .

In generale, per una funzione misurabile u , osservato che

$$u = u^+ - u^-$$

dove $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$ sono rispettivamente la parte positiva e negativa di u , si definisce

$$\int_{\Omega} u(x) d\mathcal{L}^N(x) := \int_{\Omega} u^+(x) d\mathcal{L}^N(x) - \int_{\Omega} u^-(x) d\mathcal{L}^N(x)$$

a condizione che almeno uno dei due integrali sia finito.

La funzione u è detta **sommabile** in Ω se entrambi gli integrali sono finiti. Si dice invece che u è **integrabile** in Ω se è sommabile o ha integrale pari a $+\infty$ o $-\infty$.

Segue dalla definizione che una funzione misurabile u è sommabile se e solo se $|u|$ è sommabile.

Esempio. La funzione $u(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ non è sommabile in $]0, +\infty[$, risultando ¹

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\text{sen } x|}{x} d\mathcal{L}^1(x) = +\infty.$$

Si osservi che l'integrale di Riemann generalizzato della funzione u esiste finito; si può infatti provare che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

1.5 Alcuni teoremi fondamentali

Teorema 1.5.1. (*Teorema di Beppo Levi o della convergenza monotona*)
Sia (u_n) una successione di funzioni misurabili, tali che

$$0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \dots.$$

Allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n d\mathcal{L}^N(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_n d\mathcal{L}^N(x).$$

Teorema 1.5.2. (*Lemma di Fatou*)

Sia (u_n) una successione di funzioni non negative e sommabili. Allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n d\mathcal{L}^N(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_n d\mathcal{L}^N(x).$$

Teorema 1.5.3. (*Teorema di Lebesgue o della convergenza dominata*)

Sia (u_n) una successione di funzioni integrabili con

$$u_n \rightarrow u \quad \text{q.o.},$$

e supponiamo, inoltre, che esista una funzione v sommabile tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n| \leq v \quad \text{q.o.}.$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_n d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u d\mathcal{L}^N(x).$$

¹Si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\text{sen } x|}{x} d\mathcal{L}^1(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\text{sen } x|}{x} d\mathcal{L}^1(x) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\text{sen } x| d\mathcal{L}^1(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k\pi} = +\infty.$$

Teorema 1.5.4. (Teorema di Fubini)

Siano

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^N : -\infty \leq a_i < x_i < b_i \leq +\infty, i = 1, 2, \dots, N\}$$

e

$$E_2 = \{y \in \mathbb{R}^m : -\infty \leq c_j < y_j < d_j \leq +\infty, j = 1, 2, \dots, m\}$$

Sia u sommabile su $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^{N+m}$. Allora

(i) per quasi ogni $x \in E_1$, la funzione $u(x, \cdot)$ è misurabile in E_2 ;

(ii) la funzione

$$v(x) = \int_{E_2} u(x, y) d\mathcal{L}^m(y)$$

è sommabile in E_1 e risulta

$$\int_E u(x, y) d\mathcal{L}^N(x) d\mathcal{L}^m(y) = \int_{E_1} d\mathcal{L}^N(x) \int_{E_2} u(x, y) d\mathcal{L}^m(y);$$

(iii) per quasi ogni $y \in E_2$, la funzione $u(\cdot, y)$ è misurabile in E_1 ;

(iv) la funzione

$$w(y) = \int_{E_1} u(x, y) d\mathcal{L}^N(x)$$

è sommabile in E_2 e risulta

$$\int_E u(x, y) d\mathcal{L}^N(x) d\mathcal{L}^m(y) = \int_{E_2} d\mathcal{L}^m(y) \int_{E_1} u(x, y) d\mathcal{L}^N(x).$$

Infine il teorema fondamentale del Calcolo si estende all'integrale di Lebesgue nella forma seguente.

Teorema 1.5.5. (Teorema di differenziazione di Lebesgue)

Sia $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ localmente sommabile.

Allora per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$

$$\exists \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{1}{\omega_N \rho^N} \int_{B_\rho(x)} u(y) d\mathcal{L}^N(y) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B_\rho(x)|} \int_{B_\rho(x)} u(y) d\mathcal{L}^N(y) = u(x)$$

(tali x si chiamano punti di Lebesgue di u).

In particolare, se u è sommabile in \mathbb{R} ,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x u(t) d\mathcal{L}^1(t) = u(x) \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}.$$

1.6 Teorema di compattezza (di Ascoli (1884) - Arzelà (1894/5))

Definizione 1.6.1. Una successione di funzioni reali (u_j) definite in Ω (aperto connesso non vuoto di \mathbb{R}^N) si dice equilimitata se esiste $M > 0$ tale che

$$\sup_{x \in \Omega} |u_j(x)| \leq M \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

La successione (u_j) si dice equicontinua se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$ implica

$$|u_j(x') - u_j(x'')| \leq \varepsilon,$$

per ogni $x', x'' \in \Omega$, per ogni $j \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.6.2. Sia (u_j) una successione di funzioni reali definite in Ω , equilimitata ed equicontinua. Allora esiste una successione estratta (u_{j_h}) da (u_j) e una funzione continua $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$(i) \quad u_{j_h}(x) \longrightarrow u(x) \quad \text{per ogni } x \in \Omega;$$

$$(ii) \quad u_{j_h} \rightrightarrows u \quad \text{uniformemente sui sottoinsiemi compatti } K \subset \Omega.$$

Dimostrazione.

- (i) Sia \mathcal{R}_Ω l'insieme dei punti di $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ le cui coordinate sono razionali. Tale insieme è numerabile e denso in Ω .

Sia $x_1 \in \mathcal{R}_\Omega$. Poiché la successione di numeri reali $(u_j(x_1))$ è limitata, per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $(u_{j_1}(x_1))$ convergente a un numero reale, sia $u(x_1)$, cioè $u_{j_1}(x_1) \longrightarrow u(x_1)$.

Consideriamo allora la successione di funzioni (u_{j_1}) , che è una sottosuccessione di quella data (u_j) ; sia $x_2 \in \mathcal{R}_\Omega$ e consideriamo la successione di numeri reali $(u_{j_1}(x_2))$.

Anch'essa è limitata, pertanto esiste una sottosuccessione $u_{j_2}(x_2) \longrightarrow u(x_2)$.

Allora, proseguendo il procedimento di estrazione successiva, possiamo costruire infinite successioni la h -esima delle quali è denotata con (u_{j_h}) , con le proprietà seguenti: ciascuna è sottosuccessione della precedente; per ogni h fissato la successione di numeri reali $(u_{j_h}(x_h))$ converge, cioè $u_{j_h}(x_h) \longrightarrow u(x_h)$.

Osserviamo inoltre che, per ogni h fissato, risulta $u_{j_h}(x_m) \longrightarrow u(x_m)$ per ogni $m = 1, 2, \dots, h-1$.

Consideriamo la successione "diagonale" (u_{hh}) , che, dunque, ha all' h -esimo posto la h -esima funzione della h -esima successione, e osserviamo che essa è una

sottosuccessione della successione (u_j) di partenza.

$$\begin{array}{ccccccc}
 u_{11}(x_1) & & u_{21}(x_1) & & u_{31}(x_1) & \dots & u_{h1}(x_1) & \dots \\
 & \searrow & & & & & & \\
 u_{12}(x_2) & & u_{22}(x_2) & & u_{32}(x_2) & \dots & u_{h2}(x_2) & \dots \\
 & & & \searrow & & & & \\
 u_{13}(x_3) & & u_{23}(x_3) & & u_{33}(x_3) & \dots & u_{h3}(x_3) & \dots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 u_{1h}(x_h) & & u_{2h}(x_h) & & u_{3h}(x_h) & \dots & u_{hh}(x_h) & \dots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \searrow
 \end{array}$$

Infatti, u_{11} in quanto elemento della sottosuccessione (u_{j1}) è una delle funzioni u_j e corrisponde ad una certa scelta $j = j_1$; la funzione u_{22} , particolare tra le funzioni u_{j2} è pure una delle u_j e corrisponde ad una certa scelta $j = j_2$, eccetera.

Ora si ha $j_1 < j_2$ in quanto l'indice j_2 che compete a u_{22} , seconda funzione della seconda successione, è almeno pari all'indice che compete a u_{21} , seconda funzione della prima sottosuccessione, dunque strettamente maggiore dell'indice che individua u_{11} , cioè di j_1 ; allo stesso modo si procede nel confronto degli indici successivi. Inoltre $u_{hh}(x)$ converge per ogni $x \in \mathcal{R}_\Omega$.

Sia ora $x \in \Omega \setminus \mathcal{R}_\Omega$. Per l'ipotesi di equicontinuità e poiché \mathcal{R}_Ω è denso in Ω , per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon \in \mathcal{R}_\Omega$ tale che $|x - x_\varepsilon| < \varepsilon$ e

$$\begin{aligned}
 |u_{hh}(x) - u_{kk}(x)| &\leq |u_{hh}(x) - u_{hh}(x_\varepsilon)| + |u_{kk}(x) - u_{kk}(x_\varepsilon)| + |u_{hh}(x_\varepsilon) - u_{kk}(x_\varepsilon)| \\
 &\leq 2\varepsilon + |u_{hh}(x_\varepsilon) - u_{kk}(x_\varepsilon)|
 \end{aligned}$$

dove nella prima disuguaglianza si è applicata la proprietà triangolare.

Poiché $x_\varepsilon \in \mathcal{R}_\Omega$ e $(u_{hh}(x_\varepsilon))$ è convergente, esiste $\nu(x_\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande tale che $|u_{hh}(x_\varepsilon) - u_{kk}(x_\varepsilon)| \leq \varepsilon$ per ogni $h, k > \nu(x_\varepsilon)$. Perciò, per ogni tale h e k si ha

$$|u_{hh}(x) - u_{kk}(x)| \leq 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Questo implica che, per ogni $x \in \Omega \setminus \mathcal{R}_\Omega$, $(u_{hh}(x))$ è una successione di numeri reali di Cauchy, quindi convergente.

In definitiva esiste una funzione $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $u_{hh}(x) \rightarrow u(x)$ per ogni $x \in \Omega$.

Inoltre, da

$$|u(x) - u(y)| = \lim_{h \rightarrow +\infty} |u_{hh}(x) - u_{hh}(y)| \quad \text{per ogni } x, y \in \Omega,$$

e dalla equicontinuità della successione (u_{hh}) segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|x - y| < \delta_\varepsilon \implies |u(x) - u(y)| \leq \varepsilon$$

per ogni $x, y \in \Omega$.

- (ii) Dimostriamo ora che la successione (u_{hh}) converge uniformemente in ogni compatto K di Ω . Sia allora K un compatto di Ω e fissiamo $\varepsilon > 0$. La collezione di palle $B_\varepsilon(x)$ di raggio ε e con centro nei punti $x \in \Omega$ ricoprono K , e possiamo selezionare un sottoricoprimento finito, sia $B_\varepsilon(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Selezioniamo un $\nu(k) \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande tale che $|u_{hh}(x_i) - u(x_i)| \leq \varepsilon$ per ogni $h > \nu(k)$, per ogni $i = 1, 2, \dots, k$. Ciascun punto $x \in K$ è contenuto in qualche palla $B_\varepsilon(x_i)$. Pertanto, per l'ipotesi di equicontinuità si ha

$$\begin{aligned}
 |u_{hh}(x) - u(x)| &\leq |u_{hh}(x) - u_{hh}(x_i)| + |u_{hh}(x_i) - u(x_i)| + |u(x) - u(x_i)| \\
 &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \quad \square
 \end{aligned}$$

Più in generale sussiste il seguente risultato.

Teorema 1.6.3. (Teorema di compattezza in $C^0(X, Y)$)

Sia X uno spazio topologico separabile² e sia (Y, d) uno spazio metrico completo. Sia U un sottoinsieme non vuoto di $C^0(X, Y)$ tale che

- (i) U è equicontinuo³ in X ,
- (ii) per ogni $x \in X$ la chiusura dell'insieme $\{u(x); u \in U\}$ è un sottoinsieme compatto di Y .

Allora ogni successione $(u_j) \subset U$ ha una sottosuccessione (u_{j_h}) convergente puntualmente in X ad una funzione $u \in C^0(X, Y)$.

Inoltre la convergenza è uniforme su ogni sottoinsieme compatto K di X .

1.7 Operatore Divergenza, Operatore Gradiente e Operatore di Laplace

Operatore Divergenza. Sia $u \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Si definisce

$$\operatorname{div} u := \sum_{j=1}^N \partial_j u_j.$$

Operatore Gradiente. Sia $u \in C^1(\Omega)$. Si definisce

$$\nabla u := (\partial_1 u, \dots, \partial_N u).$$

Operatore di Laplace. Sia $u \in C^2(\Omega)$. Si definisce

$$\Delta u := \operatorname{div} \nabla u = \sum_{j=1}^N \partial_{jj} u.$$

1.8 Misura di Hausdorff

La misura di Lebesgue non permette di distinguere tra loro insiemi di misura nulla, né di assegnare una dimensione a tali insiemi. Per questo scopo sono state introdotte numerose misure. Quella di Hausdorff si è rivelata molto utile nello studio delle equazioni a derivate parziali.

Misura di Hausdorff k -dimensionale (1918).

Sia $E \subset \mathbb{R}^N$, k intero positivo $0 < k \leq N$, $\delta > 0$; definiamo

$$\mathcal{H}_\delta^k(E) := \omega_k 2^{-k} \inf \left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} (\operatorname{diam} E_j)^k; E \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j, \operatorname{diam} E_j < \delta \right\}.$$

² X contiene un sottoinsieme denso e numerabile.

³ Per ogni $x \in X$, l'insieme U è equicontinuo in x se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno di x , $V(x)$, tale che

$$d(u(t), u(x)) < \varepsilon \quad \text{per ogni } t \in V(x) \text{ e per ogni } u \in U.$$

Se δ decresce l'estremo inferiore è fatto su una famiglia più piccola di ricoprimenti di E , sicché $\mathcal{H}_\delta^k(E)$ cresce (i.e. $0 < \delta' < \delta \Rightarrow \mathcal{H}_{\delta'}^k(E) \geq \mathcal{H}_\delta^k(E)$, quindi la funzione $\delta \mapsto \mathcal{H}_\delta^k(E)$ è non-crescente).

Allora

$$\exists \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^k(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^k(E) := \mathcal{H}^k(E);$$

$\mathcal{H}^k(E)$ si chiama la **misura di Hausdorff k-dimensionale di E**.

Si pone $\mathcal{H}^0(E) = \text{card } E$ (cardinalità di E).

Proprietà delle misure di Hausdorff:

- (i) Se $E \subset \mathbb{R}^N$ è misurabile, si ha $\mathcal{H}^N(E) = \mathcal{L}^N(E)$;
- (ii) $0 < \mathcal{H}^k(E) < +\infty \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{H}^m(E) = 0 & \forall m > k \\ \mathcal{H}^m(E) = +\infty & \forall m < k; \end{cases}$
- (iii) $\mathcal{H}^k(E+x) = \mathcal{H}^k(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$ (invarianza per traslazioni);
- (iv) $\mathcal{H}^k(\lambda E) = \lambda^k \mathcal{H}^k(E) \quad \forall \lambda > 0$ (\mathcal{H}^k è omogenea di grado k)
dove $\lambda E = \{\lambda x; x \in E\}$.

1.9 Teorema della divergenza in \mathbb{R}^N (Gauss-Green)

Teorema 1.9.1. Sia $\overline{\Omega}$ connesso, compatto di \mathbb{R}^N , di classe C^1 a tratti⁴ e sia $u \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$. Allora

$$\int_{\Omega} \text{div } u(x) d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\partial\Omega} u(\xi) \cdot \nu(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi),$$

dove $\nu(\xi)$ è il **versore normale esterno** applicato a $\xi \in \partial\Omega$ (ove definito).

Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, allora

$$\int_{\Omega} u_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\partial\Omega} u(\xi) \nu_i(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \quad (i = 1, \dots, N).$$

Teorema 1.9.2. (Teorema di integrazione per parti)

Se $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, allora

$$\int_{\Omega} u_{x_i}(x) v(x) d\mathcal{L}^N(x) = - \int_{\Omega} u(x) v_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x) + \int_{\partial\Omega} u(\xi) v(\xi) \nu_i(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\ (i = 1, \dots, N).$$

Dimostrazione. Applicare il teorema della divergenza alla funzione prodotto

$$u \cdot v \in C^1(\overline{\Omega}). \quad \square$$

⁴i.e. $\partial\Omega$ è di classe C^1 a tratti, ovvero per q.o. $\xi_0 \in \partial\Omega$, esiste $r > 0$ tale che $\partial\Omega \cap B_r(\xi_0)$ è implicitamente rappresentata in un sistema locale di coordinate come insieme di livello di una funzione $\psi \in C^1(B_r(\xi_0))$ tale che $|\nabla\psi(x)| \neq 0 \quad \forall x \in B_r(\xi_0)$.

1.10 Le identità di Green

Teorema 1.10.1. Sia $\overline{\Omega}$ connesso, compatto di \mathbb{R}^N , di classe C^1 a tratti e siano $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Allora

$$\int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla u(x) d\mathcal{L}^N(x) + \int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\partial\Omega} v(\xi) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)$$

(I identità di Green);

$$\int_{\Omega} [v(x) \Delta u(x) - u(x) \Delta v(x)] d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\partial\Omega} [v(\xi) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) - u(\xi) \frac{\partial v}{\partial \nu}(\xi)] d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)$$

(II identità di Green);

dove $\frac{\partial u}{\partial \nu} := \nabla u \cdot \nu$ (derivata normale di u su $\partial\Omega$).

Dimostrazione. Consideriamo $v \nabla u \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$; per il teorema della divergenza

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(v \nabla u) d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\partial\Omega} v(\xi) \nabla u(\xi) \cdot \nu(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi),$$

e poiché

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v \nabla u) &= \sum_{j=1}^N \partial_j (v \partial_j u) = \sum_{j=1}^N \partial_j v \partial_j u + \sum_{j=1}^N v \partial_{jj} u \\ &= \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u, \end{aligned}$$

si ha la I identità di Green.

La seconda identità di Green si ottiene sottraendo alla prima la identità

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) d\mathcal{L}^N(x) + \int_{\Omega} u(x) \Delta v(x) d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\partial\Omega} u(\xi) \frac{\partial v}{\partial \nu}(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi). \quad \square$$

Osservazione 1.10.2. Se nella II identità di Green si sceglie $v \equiv 1$ in $\overline{\Omega}$, si ha

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi).$$

1.11 Un criterio di sommabilità

Teorema 1.11.1. Consideriamo per $N \geq 1$ la funzione

$$x \in \mathbb{R}^N \rightarrow |x|^\lambda \in \mathbb{R}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proviamo che:

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} |x|^\lambda d\mathcal{L}^N(x) < +\infty &\iff \lambda > -N, \\ \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_r(0)} |x|^\lambda d\mathcal{L}^N(x) < +\infty &\iff \lambda < -N. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $0 < r < R$ e consideriamo

$$\int_{B_R(0) \setminus \overline{B}_r(0)} |x|^\lambda d\mathcal{L}^N(x)$$

posto $\omega = \frac{x}{\varrho}$ con $\varrho = |x|$, $d\mathcal{L}^N(x) = d\mathcal{H}^{N-1}(\varrho\omega) d\mathcal{L}^1(\varrho) = \varrho^{N-1} d\mathcal{H}^{N-1}(\omega) d\mathcal{L}^1(\varrho)$ (cfr. e.g. [7], Th.(2.49)), si ha

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0) \setminus \overline{B}_r(0)} |x|^\lambda d\mathcal{L}^N(x) &= \int_r^R \int_{|\omega|=1} \varrho^{\lambda+N-1} d\mathcal{H}^{N-1}(\omega) d\mathcal{L}^1(\varrho) \\ &= \int_{|\omega|=1} d\mathcal{H}^{N-1}(\omega) \int_r^R \varrho^{\lambda+N-1} d\mathcal{L}^1(\varrho) \\ &= \begin{cases} N\omega_N \log \frac{R}{r} & \text{se } \lambda = -N \\ \frac{N\omega_N}{\lambda + N} [R^{\lambda+N} - r^{\lambda+N}] & \text{se } \lambda \neq -N. \end{cases} \end{aligned}$$

Allora

$$\int_{B_R(0)} |x|^\lambda d\mathcal{L}^N(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{B_R(0) \setminus \overline{B}_r(0)} |x|^\lambda d\mathcal{L}^N(x) < +\infty \iff \lambda > -N,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_r(0)} |x|^\lambda d\mathcal{L}^N(x) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R(0) \setminus \overline{B}_r(0)} |x|^\lambda d\mathcal{L}^N(x) < +\infty \iff \lambda < -N. \quad \square$$

CAPITOLO 2

Elementi della teoria (matematica) del potenziale (scalare): l'equazione di Laplace, di Poisson e problemi connessi

2.1 Funzioni armoniche in Ω

Definizione 2.1.1. Sia Ω aperto connesso non vuoto di \mathbb{R}^N .

u armonica in $\Omega \stackrel{\text{def}}{\iff} u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ (equazione di Laplace) in Ω .

Nel caso $N = 2$ la parte reale e la parte immaginaria di una funzione olomorfa sono funzioni armoniche.

Esempio 2.1.2. (Funzioni armoniche che dipendono dalla distanza da un punto fissato (soluzioni radiali dell'equazione di Laplace))

Fissiamo

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0) \in \mathbb{R}^N \quad (N \geq 2)$$

e sia

$$0 < r = |x - x^0| = \left(\sum_{i=1}^N (x_i - x_i^0)^2 \right)^{1/2}$$

la distanza euclidea di $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{x^0\}$ da x^0 ; sia

$$u(|x - x^0|) = \varphi(r)$$

e imponiamo che sia armonica in $\mathbb{R}^N \setminus \{x^0\}$.

Poiché

$$\begin{aligned} \partial_j u &= \varphi'(r) \cdot \partial_j r = \varphi'(r) \cdot \frac{x_j - x_j^0}{r} \\ \partial_{jj} u &= \varphi''(r) \cdot \frac{(x_j - x_j^0)^2}{r^2} + \varphi'(r) \cdot \frac{r^2 - (x_j - x_j^0)^2}{r^3} \end{aligned}$$

(dove $\varphi'(r) = \frac{d\varphi}{dr}(r)$ e $\varphi''(r) = \frac{d^2\varphi}{dr^2}(r)$) si ha

$$0 = \Delta u = \varphi''(r) + \frac{N-1}{r} \cdot \varphi'(r) = \frac{1}{r^{N-1}} \cdot \frac{d}{dr} (r^{N-1} \cdot \varphi'(r))$$

(i.e. il Δ quando agisce su una funzione radiale $\varphi = \varphi(r)$ si trasforma nell'operatore $\frac{d^2}{dr^2} + \frac{N-1}{r} \cdot \frac{d}{dr}$ o equivalentemente nell'operatore $\frac{1}{r^{N-1}} \cdot \frac{d}{dr} (r^{N-1} \cdot \frac{d}{dr})$). Allora, poiché $r \in]0, +\infty[$,

$$r^{N-1} \cdot \varphi'(r) = \text{cost.}$$

Ne segue che

$$\varphi(r) = \begin{cases} a \log r + b & \text{se } N = 2 \\ a r^{2-N} + b & \text{se } N \geq 3 \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, sono funzioni armoniche in $\mathbb{R}^N \setminus \{x^0\}$.

Teorema 2.1.3. (*Proprietà (uguaglianza) del valor medio per le funzioni armoniche*)
Sia u armonica in Ω ; allora

$$\forall \overline{B}_R(y) \subset \Omega \quad u(y) = \frac{1}{N\omega_N R^{N-1}} \int_{\partial B_R(y)} u(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi),$$

o (equivalentemente)

$$u(y) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} u(x) d\mathcal{L}^N(x)$$

(i.e. u verifica la proprietà del valor medio).

Dimostrazione. Sia $\varrho \in]0, R]$ e consideriamo $B_\varrho(y)$. Osservato che $u \in C^2(\overline{B}_\varrho(y))$ e che u è armonica in $B_\varrho(y)$, dall'identità (si veda l'Osservazione 1.10.2)

$$\int_{\partial B_\varrho(y)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) = \int_{B_\varrho(y)} \Delta u(x) d\mathcal{L}^N(x) = 0$$

segue che

$$0 = \int_{\partial B_\varrho(y)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi),$$

e quindi, posto $\omega = \frac{\xi - y}{\varrho}$, ove $\varrho = |\xi - y|$, si ha

$$d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) = d\mathcal{H}^{N-1}(y + \varrho\omega) = \varrho^{N-1} d\mathcal{H}^{N-1}(\omega),$$

pertanto

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{|\omega|=1} \frac{du}{d\rho}(y + \rho\omega) d\mathcal{H}^{N-1}(y + \rho\omega) \\ &= \rho^{N-1} \frac{d}{d\rho} \int_{|\omega|=1} u(y + \rho\omega) d\mathcal{H}^{N-1}(\omega) \\ &= \rho^{N-1} \frac{d}{d\rho} \left[\rho^{1-N} \int_{\partial B_\rho(y)} u(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \right]. \end{aligned}$$

Ne segue che la funzione

$$\Phi(\rho) := \rho^{1-N} \int_{\partial B_\rho(y)} u(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) = \text{cost} \quad \forall \rho \in]0, R],$$

per cui

$$\rho^{1-N} \int_{\partial B_\rho(y)} u(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) = R^{1-N} \int_{\partial B_R(y)} u(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)$$

e passando al limite per $\rho \rightarrow 0^+$ si ha la tesi ⁵.

D'altra parte, da

$$\rho^{N-1} u(y) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B_\rho(y)} u(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi),$$

integrando rispetto a ρ tra 0 ed R si ottiene

$$u(y) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} u(x) d\mathcal{L}^N(x). \quad \square$$

2.2 Funzioni subarmoniche e superarmoniche in Ω

Definizione 2.2.1. (Funzioni subarmoniche in Ω .)

$$\begin{aligned} u \text{ subarmonica in } \Omega &\stackrel{\text{def}}{\iff} u \in C^0(\Omega) \text{ e } \forall \overline{B}_R(y) \subset \Omega : \\ &u(y) \leq \frac{1}{N\omega_N R^{N-1}} \int_{\partial B_R(y)} u(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \quad \text{oppure} \\ &u(y) \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} u(x) d\mathcal{L}^N(x). \\ &\quad \text{(disuguaglianza del valor medio)} \end{aligned}$$

Osservazione.

$$u \in C^2(\Omega) \text{ e } \Delta u \geq 0 \text{ in } \Omega \implies u \text{ subarmonica in } \Omega$$

(basta ripercorrere la dimostrazione del teorema precedente).

Nel seguito indicheremo con $\sigma(\Omega)$ la **classe delle funzioni subarmoniche in Ω** .

⁵essendo u continua su $\partial B_\rho(y)$,

$$\exists \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{1}{N\omega_N \rho^{N-1}} \int_{\partial B_\rho(y)} u(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) = u(y)$$

(vedi, e.g., G. Gilardi, *Analisi due*, McGraw-Hill, Milano, 1993).

Definizione 2.2.2. (Funzioni superarmoniche in Ω .)

$$u \text{ superarmonica in } \Omega \stackrel{\text{def}}{\iff} u \in C^0(\Omega) \text{ e } \forall \overline{B}_R(y) \subset \Omega : \\ u(y) \geq \frac{1}{N\omega_N R^{N-1}} \int_{\partial B_R(y)} u(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \text{ oppure} \\ u(y) \geq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} u(x) d\mathcal{L}^N(x). \\ \text{(disuguaglianza del valor medio)}$$

Osservazione.

$$u \in C^2(\Omega) \text{ e } \Delta u \leq 0 \text{ in } \Omega \implies u \text{ superarmonica in } \Omega.$$

Osservazione.

$$u \text{ subarmonica in } \Omega \iff -u \text{ superarmonica in } \Omega.$$

Nel seguito proveremo che se $u \in C^0(\Omega)$ e verifica la proprietà del valor medio, allora u è armonica in Ω . Pertanto si ha

$$u \text{ armonica in } \Omega \iff u \text{ subarmonica e superarmonica in } \Omega.$$

2.3 Principio del massimo (minimo) forte e debole

Teorema 2.3.1. (Principio del massimo forte per le funzioni subarmoniche.) Sia Ω aperto connesso non vuoto di \mathbb{R}^N e sia $u \in \sigma(\Omega)$. Supponiamo che

$$\exists y \in \Omega \text{ t.c. } u(y) = \sup_{\Omega} u.$$

Allora

$$u \text{ è costante in } \Omega.$$

Teorema 2.3.2. (Principio del minimo forte per le funzioni superarmoniche.) Sia u superarmonica in Ω e supponiamo che

$$\exists y \in \Omega \text{ t.c. } u(y) = \inf_{\Omega} u.$$

Allora

$$u \text{ è costante in } \Omega.$$

Dimostrazione. È sufficiente provare il primo principio perché il secondo ne segue; infatti:

$$u \text{ superarmonica in } \Omega \iff -u \text{ subarmonica in } \Omega;$$

quindi, da $u(y) = \inf_{\Omega} u$, si ha

$$-u(y) = -\inf_{\Omega} u = \sup_{\Omega} (-u).$$

Dimostriamo allora il primo principio.

Posto $M = u(y) = \sup_{\Omega} u$ e $\Omega_M = \{x \in \Omega; u(x) = M\}$, osserviamo che $\Omega_M \neq \emptyset$ ($y \in \Omega_M$ per ipotesi) e che, essendo $\Omega_M = u^{-1}(\{M\})$, Ω_M è un chiuso relativamente ad Ω . D'altra parte, preso $z \in \Omega_M$ (i.e. $u(z) = M$), per la disuguaglianza del valor medio applicata alla funzione subarmonica $u - M$, si ha, per $\overline{B}_R(z) \subset \Omega$,

$$0 = u(z) - M \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(z)} [u(x) - M] d\mathcal{L}^N(x) \leq 0,$$

cioè $u(x) - M = 0$ per ogni $x \in B_R(z)$, per cui $B_R(z) \subset \Omega_M$. Allora Ω_M è anche aperto relativamente ad Ω , che è connesso, pertanto $\Omega_M = \Omega$, cioè $u(x) = M$ per ogni $x \in \Omega$. \square

Teorema 2.3.3. (Principio del massimo (risp. minimo) debole per le funzioni subarmoniche (risp. superarmoniche).)

Sia Ω aperto connesso non vuoto **limitato** di \mathbb{R}^N , $u \in C^0(\overline{\Omega})$ e subarmonica (risp. superarmonica) in Ω .

Allora

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \left(\text{risp.} \quad \inf_{\overline{\Omega}} u = \inf_{\partial\Omega} u \right).$$

Conseguenza importante: Sia Ω aperto connesso non vuoto **limitato** di \mathbb{R}^N , $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ armonica in Ω .

Allora

$$(i) \quad \inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

$$(ii) \quad \sup_{\overline{\Omega}} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u| \quad (\text{teorema del massimo (per il) modulo}).$$

(Per quanto riguarda il teorema del massimo modulo è sufficiente osservare che $|u| = \max\{u, -u\}$, oppure, che essendo u armonica (regolare) allora $|u|$ è subarmonica (regolare)).

Osservazione. Sia Ω aperto connesso non vuoto **limitato** di \mathbb{R}^N , e siano

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \quad \text{armonica in } \Omega \quad \text{e} \quad v \in \sigma(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$$

tali che

$$v \leq u \quad \text{su} \quad \partial\Omega.$$

Allora

$$v \leq u \quad \text{in} \quad \overline{\Omega}.$$

Dimostrazione. La funzione $u - v \in C^0(\overline{\Omega})$ ed è superarmonica in Ω ; per il principio del minimo debole

$$\inf_{\overline{\Omega}} (u - v) = \inf_{\partial\Omega} (u - v) \geq 0$$

e quindi

$$v \leq u \quad \text{in} \quad \overline{\Omega}. \quad \square$$

2.4 Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson (o per l'equazione di Laplace nel caso omogeneo, $f \equiv 0$)

Problema 2.4.1. Sia Ω aperto connesso non vuoto, **limitato** di \mathbb{R}^N ; assegnate $f \in C^0(\Omega)$ e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ determinare, se esiste, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega & (\text{equazione di Poisson}) \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi & & (\text{condizione al contorno, di Dirichlet}) \end{cases}$$

Teorema 2.4.2. (*Teorema di unicità*)

Se esiste $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ soluzione del Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson, essa è unica.

Dimostrazione. Se $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ sono soluzioni dello stesso problema, allora $w = u_1 - u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ e

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Allora, essendo

$$0 = \inf_{\partial\Omega} w \leq w(x) \leq \sup_{\partial\Omega} w = 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

si ha $w \equiv 0$ in $\overline{\Omega}$, da cui $u_1 = u_2$ (oppure da $\max_{\overline{\Omega}} |w| = \max_{\partial\Omega} |w| = 0 \implies w = 0$). \square

Osservazione. L'unicità è conseguenza, sostanzialmente, del principio del massimo nell'ipotesi di limitatezza per Ω . Notiamo che se Ω non è limitato, l'unicità può non sussistere.

Sia $N = 2$ e $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \in \mathbb{R}, -\pi < x_2 < \pi\}$; il problema omogeneo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ha soluzione $u \equiv 0$, ma e.g. anche

$$u(x_1, x_2) = k e^{x_1} \sin x_2 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

è soluzione.

2.5 Soluzione fondamentale per l'operatore di Laplace

Useremo ora la II identità di Green per trovare una formula integrale per la soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson.

A tale scopo introduciamo la

Definizione 2.5.1. Soluzione fondamentale per il Δ (operatore di Laplace)

Sia $x^0 \in \mathbb{R}^N$ fissato; definiamo ⁶ “soluzione fondamentale (di polo x^0) per il Δ ” la funzione (radiale)

$$\Gamma(x-x^0) = \Gamma(|x-x^0|) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x-x^0| & \text{se } N=2 \\ \frac{1}{N(2-N)\omega_N} |x-x^0|^{2-N} & \text{se } N \geq 3 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{x^0\}.$$

Nel seguito, per semplicità di esposizione, ci riferiremo solo a Γ in dimensione $N \geq 3$.

Osservazione 2.5.2. Osserviamo che

- (i) $\Gamma(\cdot - x^0) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{x^0\})$;
- (ii) $\Delta_x \Gamma(x - x^0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{x^0\}$;
- (iii) $\Gamma(x - x^0)$ è sommabile in ogni $B_R(x^0)$;
- (iv) $\forall i = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \partial_i \Gamma(x - x^0) &= \frac{1}{N(2-N)\omega_N} \frac{2-N}{2} |x-x^0|^{-N} 2(x_i - x_i^0) \\ &= \frac{1}{N\omega_N} |x-x^0|^{-N} (x_i - x_i^0), \end{aligned}$$

pertanto $\partial_i \Gamma(x - x^0)$ è sommabile in ogni $B_R(x^0)$;

- (v) $\forall i, j = 1, \dots, N$

$$\partial_{ij} \Gamma(x - x^0) = \frac{1}{N\omega_N} \left[-N |x-x^0|^{-N-2} (x_j - x_j^0)(x_i - x_i^0) + |x-x^0|^{-N} \delta_{ij} \right]$$

$$\text{dove } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j, \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Nel seguito (Osservazione 3.3.7) vedremo che, nel senso delle distribuzioni in \mathbb{R}^N , $\Delta_x \Gamma(x - x^0) = \delta_{x^0}$ ove δ_{x^0} è la (distribuzione) delta di Dirac di polo x^0 .

⁶cfr. Osservazione 3.3.7

2.6 Rappresentazione di Green

Teorema 2.6.1. (*Rappresentazione di Green*)

Sia $\bar{\Omega}$ connesso, compatto di \mathbb{R}^N , di classe C^1 a tratti e $u \in C^2(\bar{\Omega})$, allora

$\forall x^0 \in \Omega$

$$u(x^0) = \int_{\Omega} \Gamma(x-x^0) \Delta u(x) d\mathcal{L}^N(x) + \int_{\partial\Omega} \left[u(\xi) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(\xi-x^0) - \Gamma(\xi-x^0) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) \right] d\mathcal{H}^{N-1}(\xi).$$

Dimostrazione. Fissato $x^0 \in \Omega$, dalla II identità di Green, con

$$v(x) = \Gamma(x-x^0) \Big|_{\Omega \setminus \overline{B_\varrho(x^0)}}$$

ove $\overline{B_\varrho(x^0)} \subset \Omega$, si ha:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus \overline{B_\varrho(x^0)}} \left[\Gamma(x-x^0) \Delta u(x) - u(x) \underbrace{\Delta_x \Gamma(x-x^0)}_{=0} \right] d\mathcal{L}^N(x) \\ &= \int_{\partial\Omega} \left[\Gamma(\xi-x^0) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) - u(\xi) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(\xi-x^0) \right] d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\ &+ \int_{\partial B_\varrho(x^0)} \left[\Gamma(\xi-x^0) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) - u(\xi) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(\xi-x^0) \right] d\mathcal{H}^{N-1}(\xi). \end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \int_{\Omega \setminus \overline{B_\varrho(x^0)}} \Gamma(x-x^0) \Delta u(x) d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x-x^0) \Delta u(x) d\mathcal{L}^N(x),$$

in quanto $\Gamma(x-x^0)$ è sommabile in un intorno di x^0 e (poiché $\Delta u \in C^0(\bar{\Omega})$) Δu è limitata;

inoltre

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_{\partial B_\varrho(x^0)} \Gamma(\xi-x^0) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \right| = \left| \int_{\partial B_\varrho(x^0)} \Gamma(\varrho) \nabla u(\xi) \cdot \nu(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \right| \\ &\leq \frac{1}{N(N-2)\omega_N} \varrho^{2-N} \sup_{\bar{\Omega}} |\nabla u| N\omega_N \varrho^{N-1} \xrightarrow{\varrho \rightarrow 0^+} 0; \end{aligned}$$

infine (osservato che $\nu(\xi)$ è interno a $B_\varrho(x^0)$)

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varrho(x^0)} u(\xi) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(\xi-x^0) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) &= -\Gamma'(\varrho) \int_{\partial B_\varrho(x^0)} u(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\ &= -\frac{1}{N\omega_N \varrho^{N-1}} \int_{\partial B_\varrho(x^0)} u(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi), \end{aligned}$$

per cui

$$\exists \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \int_{\partial B_\varrho(x^0)} u(\xi) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(\xi-x^0) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) = -u(x^0).$$

In definitiva (passando al limite per $\varrho \rightarrow 0^+$) si ha:

$$\begin{aligned} u(x^0) &= \int_{\Omega} \Gamma(x-x^0) \Delta u(x) d\mathcal{L}^N(x) \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left[u(\xi) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(\xi-x^0) - \Gamma(\xi-x^0) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) \right] d\mathcal{H}^{N-1}(\xi). \quad \square \end{aligned}$$

Conseguenza importante. Se inoltre $\Delta u = 0$ in Ω , si ha

$$\forall x^0 \in \Omega \quad u(x^0) = \int_{\partial\Omega} \left[u(\xi) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(\xi - x^0) - \Gamma(\xi - x^0) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) \right] d\mathcal{H}^{N-1}(\xi). \quad (2.1)$$

Osservazione 2.6.2. La formula (2.1) è utile per discutere la “regolarità” delle funzioni armoniche:

le funzioni armoniche sono C^∞ , le derivate di qualsiasi ordine di una funzione armonica sono funzioni armoniche.

Osservazione 2.6.3. La (2.1) esprimendo u in Ω in termini dei suoi dati di Cauchy u e $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ su $\partial\Omega$ rappresenta la soluzione del problema di Cauchy in Ω , purché una tale soluzione esista (vedremo nel seguito che **il problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in generale non ha soluzione** (nemmeno localmente)).

D'altra parte, per il teorema di unicità per il problema di Dirichlet per $\Delta u = 0$, la soluzione è univocamente determinata dal solo valore di u su $\partial\Omega$.

Per ottenere un integrale su $\partial\Omega$ che dipenda solamente dai valori alla frontiera e non anche dalla derivata normale introdurremo la cosiddetta funzione di Green di Ω .

2.7 Funzione di Green

Sia $h \in C^2(\overline{\Omega})$ e $\Delta h = 0$ in Ω . Applicando la II identità di Green ad u e h , si ha

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left[u(\xi) \frac{\partial h}{\partial \nu}(\xi) - h(\xi) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) \right] d\mathcal{H}^{N-1}(\xi).$$

Sommando, membro a membro, con (2.1) si ha

$$u(x^0) = \int_{\partial\Omega} \left[u(\xi) \frac{\partial G}{\partial \nu}(\xi, x^0) - G(\xi, x^0) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) \right] d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \quad \forall x^0 \in \Omega,$$

avendo posto

$$G(\xi, x^0) = \Gamma(\xi - x^0) + h(\xi).$$

Definita

$$G : \overline{\Omega} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(y, x^0), \text{ con } y \neq x^0, \mapsto G(y, x^0) = \Gamma(y - x^0) + h(y),$$

se

$$G(\xi, x^0) \equiv 0 \quad \forall \xi \in \partial\Omega, x^0 \in \Omega$$

(e in questo caso G si chiama **funzione di Green (relativa ad Ω e Δ)**) si ha

$$u(x^0) = \int_{\partial\Omega} u(\xi) \frac{\partial G}{\partial \nu}(\xi, x^0) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \quad \forall x^0 \in \Omega. \quad (2.2)$$

Osserviamo che per determinare G si deve risolvere in Ω un particolare problema di Dirichlet omogeneo:

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{in } \Omega \\ h(\xi) = -\Gamma(\xi - x^0) & \forall \xi \in \partial\Omega \quad (x^0 \in \Omega) \end{cases}$$

pertanto (in virtù del teorema di unicità) la funzione di Green se esiste è **unica**.

L'idea è quindi che la risoluzione di una classe di problemi di Dirichlet omogenei in Ω consente di determinare G e risolvere, tramite la (2.2), tutti i problemi di Dirichlet, omogenei e non.

La funzione di Green relativa a $B_R(0)$.

Sia $\Omega = B_R(0)$; consideriamo la riflessione rispetto alla sfera $\partial B_R(0)$:

$$\begin{aligned} y \in \overline{B_R(0)} \setminus \{0\} &\rightarrow \bar{y} = \frac{R^2}{|y|^2} y \\ y = 0 &\rightarrow \bar{y} = \infty. \end{aligned}$$

Definiamo per ogni $y \in \overline{B_R(0)}$, $x^0 \in B_R(0)$ con $y \neq x^0$

$$G(y, x^0) = \begin{cases} \Gamma(|y - x^0|) - \left(\frac{|y|}{R}\right)^{2-N} \Gamma(|\bar{y} - x^0|) & \text{se } y \neq 0 \\ \Gamma(|x^0|) - \Gamma(R) & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Osservato che per $y \neq 0$ si ha:

$$\left(\frac{|y|}{R}\right)^{2-N} \Gamma(|\bar{y} - x^0|) = \left(\frac{|y|}{R}\right)^{2-N} \Gamma\left(\left|\frac{R^2}{|y|^2} y - x^0\right|\right) = \Gamma\left(\left|\frac{R}{|y|} y - \frac{|y|}{R} x^0\right|\right),$$

possiamo scrivere, per ogni $y \in \overline{B_R(0)}$, $x^0 \in B_R(0)$ con $y \neq x^0$

$$G(y, x^0) = \Gamma\left(\sqrt{|y|^2 + |x^0|^2 - 2y \cdot x^0}\right) - \Gamma\left(\sqrt{R^2 + \left(\frac{|y||x^0|}{R}\right)^2 - 2y \cdot x^0}\right).$$

Osserviamo che $G(y, x^0) = G(x^0, y)$.

La $G = G(y, x^0)$ così definita è la funzione di Green relativa a $B_R(0)$; infatti l'addendo

$$\Gamma\left(\left|\frac{R}{|y|} y - \frac{|y|}{R} x^0\right|\right)$$

è armonico rispetto ad y e

$$G(\xi, x^0) \equiv 0 \quad \forall \xi \in \partial B_R(0), x^0 \in B_R(0).$$

Tenendo presente la (2.2), calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\xi, x^0)}{\partial \nu(\xi)} &= \left[\frac{\partial G(y, x^0)}{\partial \nu(y)} \right]_{|y| \rightarrow |\xi|=R} = \left[\frac{\partial G(y, x^0)}{\partial |y|} \right]_{|y| \rightarrow |\xi|=R} \\ &= \frac{R^2 - |x^0|^2}{N\omega_N R} |\xi - x^0|^{-N} > 0 \quad \forall \xi \in \partial B_R(0), x^0 \in B_R(0). \end{aligned}$$

Nel seguito porremo

$$K(\xi, x^0) = \frac{\partial G(\xi, x^0)}{\partial \nu(\xi)} = \frac{R^2 - |x^0|^2}{N\omega_N R} |\xi - x^0|^{-N} \quad \text{(nucleo di Poisson)}$$

e osserviamo che $K(\xi, x^0)$ è una funzione armonica rispetto ad x^0 , in quanto derivata (direzionale) della $G(\xi, x^0)$ che è armonica rispetto ad x^0 , per ogni $\xi \in \partial B_R(0)$. In definitiva, per (2.2), se $u \in C^2(\overline{B_R(0)})$ è **armonica** in $B_R(0)$, si ha

$$u(x^0) = \frac{R^2 - |x^0|^2}{N\omega_N R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{u(\xi)}{|\xi - x^0|^N} d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \quad \forall x^0 \in B_R(0) \quad (2.3)$$

(integrale di Poisson).

Si può provare che la rappresentazione (2.3) di u è valida anche se $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$ anziché $u \in C^2(\overline{B_R(0)})$.

Osserviamo che se in (2.3) prendiamo $x^0 = 0$ (centro di $B_R(0)$), allora

$$u(0) = \frac{1}{N\omega_N R^{N-1}} \int_{\partial B_R(0)} u(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi),$$

che è la proprietà del valor medio per le funzioni armoniche.

Osserviamo, anche, che se $u = 1$ in $\overline{B_R(0)}$, da (2.3) si ottiene

$$1 = \int_{\partial B_R(0)} K(\xi, x^0) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \quad \forall x^0 \in B_R(0). \quad (2.4)$$

Abbiamo dimostrato che ogni $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$ con $\Delta u = 0$ in $B_R(0)$ è rappresentabile come in (2.3). Vale anche il viceversa, come mostra il seguente teorema:

Teorema 2.7.1. *(Teorema di esistenza, unicità e dipendenza continua della soluzione dal dato φ , per il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in $B_R(0)$)*
Assegnata $\varphi \in C^0(\partial B_R(0))$, la funzione definita in $B_R(0)$ da:

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{N\omega_N R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{\varphi(\xi)}{|\xi - x|^N} d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \quad \forall x \in B_R(0)$$

è armonica in $B_R(0)$; inoltre per ogni $\xi_0 \in \partial B_R(0)$

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow \xi_0 \\ x \in B_R(0)}} u(x) = \varphi(\xi_0).$$

Pertanto

$$u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)}) \quad e \quad u = \varphi \quad su \quad \partial B_R(0).$$

In fine (per il teorema del massimo modulo):

$$\sup_{\overline{B_R(0)}} |u| = \sup_{\partial B_R(0)} |\varphi|.$$

Dimostrazione. Che la funzione $u = u(x)$ sopra definita sia armonica in $B_R(0)$ segue dal fatto, già osservato, che il nucleo di Poisson $K(\xi, x)$ è armonico rispetto ad x , per ogni $\xi \in \partial B_R(0)$.

Per definizione di limite, provare che

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow \xi_0 \\ x \in B_R(0)}} u(x) = \varphi(\xi_0),$$

equivale a provare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad : \quad \forall x \in B_R(0) \quad |\xi_0 - x| < \frac{\delta_\varepsilon}{2} \implies |u(x) - \varphi(\xi_0)| < \varepsilon.$$

Sia $\varepsilon > 0$; per la continuità di φ in $\xi_0 \in \partial B_R(0)$,

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \quad : \quad \forall \xi \in \partial B_R(0) \quad |\xi - \xi_0| < \delta_\varepsilon \implies |\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)| < \varepsilon.$$

Sia $x \in B_R(0)$ tale che $|\xi_0 - x| < \frac{\delta_\varepsilon}{2}$. Si ha

$$\begin{aligned} u(x) - \varphi(\xi_0) &= \int_{\partial B_R(0)} K(\xi, x) \varphi(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) - \varphi(\xi_0) \\ &\stackrel{\text{per (2.4)}}{=} \int_{\partial B_R(0)} K(\xi, x) [\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)] d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} |u(x) - \varphi(\xi_0)| &\leq \int_{\partial B_R(0)} K(\xi, x) |\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)| d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\ &= \int_{\{\xi \in \partial B_R(0); |\xi - \xi_0| < \delta_\varepsilon\}} K(\xi, x) |\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)| d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\ &\quad + \int_{\{\xi \in \partial B_R(0); |\xi - \xi_0| \geq \delta_\varepsilon\}} K(\xi, x) |\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)| d\mathcal{H}^{N-1}(\xi). \end{aligned}$$

Ora

$$\int_{\{\xi \in \partial B_R(0); |\xi - \xi_0| < \delta_\varepsilon\}} K(\xi, x) |\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)| d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) < \varepsilon,$$

e poiché

$$|\xi - x| \geq |\xi - \xi_0| - |\xi_0 - x|$$

si ha su $\{\xi \in \partial B_R(0); |\xi - \xi_0| \geq \delta_\varepsilon\}$

$$|\xi - x| \geq \delta_\varepsilon - \frac{\delta_\varepsilon}{2} = \frac{\delta_\varepsilon}{2}$$

e quindi, il secondo integrale,

$$\begin{aligned}
& \int_{\{\xi \in \partial B_R(0); |\xi - \xi_0| \geq \delta_e\}} K(\xi, x) |\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)| d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\
&= \frac{R^2 - |x|^2}{N\omega_N R} \int_{\{\xi \in \partial B_R(0); |\xi - \xi_0| \geq \delta_e\}} \frac{1}{|\xi - x|^N} |\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)| d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\
&\leq \frac{R^2 - |x|^2}{N\omega_N R} \left(\frac{2}{\delta_e}\right)^N \cdot 2 \sup_{\partial B_R(0)} |\varphi| N\omega_N R^{N-1} \\
&= (R^2 - |x|^2) \left(\frac{2}{\delta_e}\right)^N \cdot 2 \sup_{\partial B_R(0)} |\varphi| R^{N-2}.
\end{aligned}$$

Poiché per $x \in B_R(0) \rightarrow \xi_0 \in \partial B_R(0)$, si ha $|x| \rightarrow R$, segue che anche

$$\int_{\{\xi \in \partial B_R(0); |\xi - \xi_0| \geq \delta_e\}} K(\xi, x) |\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)| d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) < \varepsilon.$$

In definitiva, risulta

$$|u(x) - \varphi(\xi_0)| < 2\varepsilon.$$

Osserviamo che il ragionamento precedente è locale; cioè, se φ è sommabile, limitata su $\partial B_R(0)$ e continua in $\xi_0 \in \partial B_R(0)$, allora

$$u(x) \rightarrow \varphi(\xi_0) \quad \text{quando} \quad x \in B_R(0) \rightarrow \xi_0. \quad \square$$

2.8 “Caratterizzazione” delle funzioni armoniche

Abbiamo già provato che ogni funzione armonica soddisfa la proprietà del valor medio.

Proviamo, ora, che:

Teorema 2.8.1. *Se $u \in C^0(\Omega)$ e verifica la proprietà del valor medio allora u è armonica in Ω .*

Dimostrazione. Basta provare che u è armonica in ogni $B_R(y)$ con $\overline{B_R(y)} \subset \Omega$. Fissata $\overline{B_R(y)} \subset \Omega$, osserviamo che $u \in C^0(\partial B_R(y))$, pertanto il problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B_R(y) \\ v = u & \text{su } \partial B_R(y) \end{cases}$$

ha, come già dimostrato, un’unica soluzione $v \in C^2(B_R(y)) \cap C^0(\overline{B_R(y)})$.

Consideriamo

$$w := v - u \in C^0(\overline{B_R(y)})$$

e osserviamo che w (e quindi anche $-w$) verifica la proprietà del valor medio (in quanto tale proprietà è lineare, v verifica la proprietà del valor medio in quanto è

funzione armonica e u la verifica per ipotesi), pertanto, per il principio del massimo debole

$$\sup_{\overline{B_R}(y)} |w| = \sup_{\partial B_R(y)} |w| = 0,$$

quindi $w = 0$, cioè $u = v$ in $\overline{B_R}(y)$, quindi u coincide con v (armonica) in $B_R(y)$. \square

2.9 Limite uniforme di successioni di funzioni armoniche

Teorema 2.9.1. *Sia (u_j) una successione di funzioni armoniche in Ω , tale che*

$$u_j \rightrightarrows u \quad \text{in } \Omega.$$

Allora

$$u \text{ è armonica in } \Omega.$$

Dimostrazione. Poiché u è limite uniforme di funzioni continue in Ω è anch'essa una funzione continua in Ω .

La tesi conseguirà se proviamo che u soddisfa la proprietà del valor medio.

Ora,

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad e \quad \forall \overline{B_R}(y) \subset \Omega \quad u_j(y) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} u_j(x) d\mathcal{L}^N(x)$$

e passando al limite per $j \rightarrow +\infty$ si ha

$$u(y) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} u(x) d\mathcal{L}^N(x). \quad \square$$

2.10 Sul concetto di problema ben posto secondo Hadamard e Principio di riflessione di Schwarz

Osservazione 2.10.1. Osserviamo che avendo provato per il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in $B_R(0)$ un teorema di **esistenza, unicità e dipendenza continua della soluzione dal dato**, tale **problema al contorno** si dice **BEN POSTO secondo Hadamard**.

Notiamo inoltre che dalla dipendenza continua della soluzione dal dato, segue che se $(\varphi_j) \subset C^0(\partial B_R(0))$ e $\varphi_j \rightrightarrows \varphi \in C^0(\partial B_R(0))$ allora la successione di problemi

$$\begin{cases} \Delta u_j = 0 & \text{in } B_R(0) \\ u_j = \varphi_j & \text{su } \partial B_R(0) \end{cases} \quad (P_j)$$

per $j \rightarrow \infty$ ha come problema limite

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_R(0) \\ u = \varphi & \text{su } \partial B_R(0) \end{cases} \quad (P_\infty)$$

Infatti da

$$\sup_{\overline{B_R}(0)} |u_j - u_k| = \sup_{\partial B_R(0)} |\varphi_j - \varphi_k| \xrightarrow{j,k \rightarrow +\infty} 0,$$

segue che la successione (u_j) è di Cauchy nello spazio di Banach

$$(C^0(\overline{B_R(0)}), \|\cdot\|_{C^0(\overline{B_R(0)})})$$

e quindi esiste $u \in C^0(\overline{B_R(0)})$ che è anche armonica in $B_R(0)$ in quanto limite uniforme di (u_j) successione di funzioni armoniche.

In conclusione possiamo dire che la dipendenza continua della soluzione dal dato esprime il fatto che l'**operatore di Green**

$$\mathcal{G} : \varphi \in C^0(\partial B_R(0)) \rightarrow \mathcal{G}(\varphi) = u \in C^0(\overline{B_R(0)}) \cap C^2(B_R(0))$$

unica soluzione di
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_R(0) \\ u = \varphi & \text{su } \partial B_R(0) \end{cases}$$

è continuo.

Osservazione 2.10.2. Ora vogliamo dare un esempio, dovuto ad Hadamard, che mostra come, in generale, rispetto a ragionevoli convergenze, il **problema di Cauchy per l'equazione di Laplace non è ben posto**, perché pur avendo esistenza della soluzione, questa può non dipendere con continuità dai dati di Cauchy.

Sia $N = 2$, $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\}$ e consideriamo il problema di Cauchy, per ogni $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \Delta u^j(x_1, x_2) = 0 & \text{in } \Omega \\ u^j(x_1, 0) = 0 & \forall x_1 \in \mathbb{R} \\ u^j_{x_2}(x_1, 0) = \frac{\text{sen}(j x_1)}{j} & \forall x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Per ogni $j \in \mathbb{N}$

$$u^j(x_1, x_2) = \frac{\text{sen}(j x_1) \sinh(j x_2)}{j^2}, \quad 7$$

⁷Poniamo

$$u^j(x_1, x_2) = \varphi(x_1) \cdot \psi(x_2);$$

pertanto da $u^j(x_1, 0) = \varphi(x_1) \cdot \psi(0) = 0$ per ogni $x_1 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\psi(0) = 0;$$

da $u^j_{x_2}(x_1, 0) = \varphi(x_1) \cdot \psi'(0) = \frac{\text{sen}(j x_1)}{j}$ per ogni $x_1 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\psi'(0) = 1 \quad (\text{costante non nulla}) \quad \text{e quindi } \varphi(x_1) = \frac{\text{sen}(j x_1)}{j};$$

da $\Delta u^j(x_1, x_2) = \varphi''(x_1) \cdot \psi(x_2) + \varphi(x_1) \cdot \psi''(x_2) = 0$ si ha

$$\varphi''(x_1) = k \varphi(x_1) \quad \text{e} \quad \psi''(x_2) = -k \psi(x_2).$$

Considerato che $\varphi(x_1) = \frac{\text{sen}(j x_1)}{j}$ dalla prima equazione differenziale si ha $k = -j^2$; considerato che

$\psi(0) = 0$ e $\psi'(0) = 1$ dalla seconda equazione differenziale si ha $\varphi(x_2) = \frac{\sinh(j x_2)}{j}$. Pertanto

$$u^j(x_1, x_2) = \frac{\text{sen}(j x_1) \sinh(j x_2)}{j^2}.$$

dove

$$\sinh(jx_2) = \frac{e^{jx_2} - e^{-jx_2}}{2},$$

è soluzione del problema in esame.

Osserviamo che

$$\left| \frac{\sinh(jx_1)}{j} \right| \leq \frac{1}{j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$$

e quindi i dati del problema tendono a zero uniformemente rispetto a $(x_1, x_2) \in \Omega$.
Tuttavia,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |u^j(x_1, x_2)| = +\infty \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega.$$

Teorema 2.10.3. (Principio di riflessione di Schwarz)

Consideriamo $B_R(0)$ in \mathbb{R}^N ($N \geq 2$); per $x = (x_1, \dots, x_{N-1}, x_N) \in \mathbb{R}^N$ poniamo $x = (x', x_N)$ dove $x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$; sia

$$B_R^+(0) = \{x \in B_R(0); x_N > 0\},$$

$$B_R^-(0) = \{x \in B_R(0); x_N < 0\}.$$

Sia $u \in C^2(B_R^+(0)) \cap C^0(\overline{B_R^+(0)})$, armonica in $B_R^+(0)$ con $u = 0$ in $\overline{B_R(0)} \cap \{x_N = 0\}$.
Posto

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \overline{B_R(0)} \cap \{x_N \geq 0\} \\ -u(x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N) & \text{se } x \in \overline{B_R(0)} \cap \{x_N < 0\} \end{cases}$$

(u^* è ottenuta da u prolungando la u come funzione dispari rispetto ad x_N),

la funzione u^* è armonica in $B_R(0)$.

Dimostrazione. È chiaro che questo prolungamento di u , u^* , è una funzione continua in $\overline{B_R(0)}$ ed armonica in $B_R^+(0) \cup B_R^-(0)$.

Il problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B_R(0) \\ v = u^* & \text{su } \partial B_R(0) \end{cases}$$

ha, come è noto, un'unica soluzione $v \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$.

Per il fatto che il dato u^* su $\partial B_R(0)$ è funzione dispari rispetto alla N -esima variabile ξ_N , si deduce che v è funzione dispari rispetto alla N -esima variabile x_N (per (2.3))⁸ e in particolare $v(x', 0) = 0 (= u^*(x', 0))$. Pertanto v coincide con u^* su $\partial B_R^+(0)$ e su

$\partial B_R^-(0)$. Per il teorema di unicità $v = u^*$ in $\overline{B_R^+(0)} \cup \overline{B_R^-(0)}$, quindi $v = u^*$ in $\overline{B_R(0)}$.

In particolare, u^* è armonica in $B_R(0)$. \square

⁸infatti, poiché $u^*(\xi', -\xi_N) = -u^*(\xi', \xi_N)$ e $K(\xi', -\xi_N; x', -x_N) = K(\xi', \xi_N; x', x_N)$ si ha

$$v(x', -x_N) = -v(x', x_N).$$

Osserviamo che il principio di riflessione di Schwarz è valido per ogni aperto connesso Ω di \mathbb{R}^N ($N \geq 2$), che sia simmetrico rispetto all'iperpiano $x_N = 0$ (cioè tale che se $(x', x_N) \in \Omega$ anche $(x', -x_N) \in \Omega$).

La dimostrazione può essere fatta localmente, ricorrendo quindi al caso particolare di $B_R(0)$ già dimostrato.

Osservazione 2.10.4. Siamo ora in grado di provare che **il problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in generale non è risolubile, nemmeno localmente.**

Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in

$$\Omega = \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^N; x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_N > 0\}$$

$$\begin{cases} \Delta u(x', x_N) = 0 & \text{in } \Omega \\ u(x', 0) = 0 & \forall x' \in \mathbb{R}^{N-1} \\ u_{x_N}(x', 0) = \varphi(x') & \forall x' \in \mathbb{R}^{N-1}. \end{cases}$$

Sia u una soluzione del problema precedente; tale u è armonica regolare in ogni $B_R^+(0)$ (al variare di $R > 0$), cioè $u \in C^2(B_R^+(0)) \cap C^0(\overline{B_R^+(0)})$ e $\Delta u = 0$ in $B_R^+(0)$. Inoltre $u = 0$ in $\overline{B_R(0)} \cap \{x_N = 0\}$.

Allora, conformemente al principio di riflessione di Schwarz, u^* è armonica in $B_R(0)$ e quindi u^* è analitica reale in $B_R(0)$.⁹

Pertanto anche

$$\varphi(x') = u_{x_N}(x', 0) = u_{x_N}^*(x', 0)$$

è necessariamente analitica reale per ogni $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$.

Ne deduciamo che il problema in oggetto può avere una soluzione solo se il dato $\varphi = \varphi(x')$, $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, è analitico reale.

2.11 Disuguaglianza di Harnack per funzioni armoniche positive

Proviamo ora la disuguaglianza di Harnack per funzioni armoniche. La disuguaglianza di Harnack esprime una notevole proprietà delle funzioni armoniche e positive in Ω , precisamente il fatto che il rapporto tra il loro estremo superiore e il loro estremo inferiore, calcolati in un arbitrario compatto connesso Ω' contenuto in Ω , è limitato superiormente da una costante che dipende dalla dimensione dello spazio euclideo, da Ω e dal compatto Ω' cui sono riferiti gli estremi.

Esponiamo successivamente un teorema di Liouville secondo il quale una funzione armonica e positiva in tutto \mathbb{R}^N è necessariamente costante (cfr. Teorema di Liouville 2.12.2 per un'altra dimostrazione) e un teorema sulla convergenza uniforme di successioni monotone crescenti di funzioni armoniche.

Proviamo dapprima la disuguaglianza di Harnack nel caso particolare in cui Ω è una palla di \mathbb{R}^N .

Lemma 2.11.1. Siano $y \in \mathbb{R}^N$, $R > 0$ e u una funzione armonica e positiva in $B_{4R}(y)$. Allora

$$\sup_{B_R(y)} u \leq 3^N \inf_{B_R(y)} u. \quad (2.5)$$

⁹Per la dimostrazione della analiticità delle funzioni armoniche consultare il Teorema 8.5.4.

Dimostrazione. Comunque si scelgano due punti $x^1, x^2 \in B_R(y) \subseteq B_{4R}(y)$ applicando il teorema del valor medio 2.1.3 si ottiene

$$u(x^1) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x^1)} u(x) d\mathcal{L}^N(x) \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_{2R}(y)} u(x) d\mathcal{L}^N(x)$$

da cui

$$\sup_{B_R(y)} u \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_{2R}(y)} u(x) d\mathcal{L}^N(x).$$

Analogamente

$$u(x^2) = \frac{1}{\omega_N 3^N R^N} \int_{B_{3R}(x^2)} u(x) d\mathcal{L}^N(x) \geq \frac{1}{\omega_N 3^N R^N} \int_{B_{2R}(y)} u(x) d\mathcal{L}^N(x)$$

da cui

$$\inf_{B_R(y)} u \geq \frac{1}{\omega_N 3^N R^N} \int_{B_{2R}(y)} u(x) d\mathcal{L}^N(x).$$

In definitiva

$$\frac{1}{3^N} \sup_{B_R(y)} u \leq \frac{1}{\omega_N 3^N R^N} \int_{B_{2R}(y)} u(x) d\mathcal{L}^N(x) \leq \inf_{B_R(y)} u$$

e quindi

$$\sup_{B_R(y)} u \leq 3^N \inf_{B_R(y)} u.$$

□

Teorema 2.11.2. (*Disuguaglianza di Harnack, 1887*)

Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^N , u una funzione armonica in Ω , $u \geq 0$. Allora per ogni Ω' connesso, $\Omega' \subset\subset \Omega$ ¹⁰, esiste una costante c dipendente solo da N, Ω, Ω' tale che

$$\sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u. \quad (2.6)$$

Dimostrazione. Il compatto e connesso $\overline{\Omega'}$ può essere ricoperto con un numero finito di palle $B_R(\omega^i) \subset \Omega$, $i = 1, 2, \dots, m$, con centri $\omega^i \in \Omega'$ (sia $R < \frac{1}{4} \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$). Siano $x^1, x^2 \in \Omega'$ tali che, senza ledere la generalità, $x^1 \in B_R(\omega^k)$, $x^2 \in B_R(\omega^{k+j})$ per qualche $j \geq 1$, e le palle siano numerate in modo che risulti $B_R(\omega^l) \cap B_R(\omega^{l+1}) \neq \emptyset$ per $l = k, k+1, \dots, k+j-1$.

¹⁰La notazione $\Omega' \subset\subset \Omega$ indica che la chiusura $\overline{\Omega'}$ è compatta e contenuta in Ω

Applicando la stima (2.5) in ciascuna palla e combinando le disuguaglianze si ottiene

$$\begin{aligned}
u(x^1) &\leq \sup_{B_R(\omega^k)} u && \leq 3^N \inf_{B_R(\omega^k)} u \\
&\leq 3^N \inf_{B_R(\omega^k) \cap B_R(\omega^{k+1})} u && \leq 3^N \sup_{B_R(\omega^k) \cap B_R(\omega^{k+1})} u \\
&\leq 3^N \sup_{B_R(\omega^{k+1})} u && \leq 3^{2N} \inf_{B_R(\omega^{k+1})} u \\
&\leq 3^{2N} \inf_{B_R(\omega^{k+1}) \cap B_R(\omega^{k+2})} u && \leq \dots \\
&\leq 3^{(j+1)N} \inf_{B_R(\omega^{k+j})} u && \leq 3^{(m+1)N} u(x^2).
\end{aligned}$$

Essendo x^1, x^2 arbitrari, posto $c := 3^{(m+1)N}$, si ha

$$\sup_{\Omega'} u \leq c \inf_{\Omega'} u$$

e la dimostrazione è completa. \square

Teorema 2.11.3. (*Teorema di Liouville*)

Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$, $\Delta u = 0$, $u \geq 0$ in \mathbb{R}^N . Allora u è costante in \mathbb{R}^N .

Dimostrazione. Sia $m = \inf_{\mathbb{R}^N} u \geq 0$ e si consideri la funzione $\mathcal{V} = u - m$. Allora $\Delta \mathcal{V} = 0$ e $\inf_{\mathbb{R}^N} \mathcal{V} = 0$. Applicando la disuguaglianza di Harnack (2.5) alla funzione \mathcal{V} si ottiene

$$\forall R > 0 \quad \sup_{B_R(0)} \mathcal{V} \leq 3^N \inf_{B_R(0)} \mathcal{V}$$

e, passando al limite per $R \rightarrow +\infty$, si ha $\sup_{\mathbb{R}^N} \mathcal{V} \leq 0$.

Osservato che risulta

$$0 = \inf_{\mathbb{R}^N} \mathcal{V} \leq \sup_{\mathbb{R}^N} \mathcal{V} \leq 0$$

si ha $\mathcal{V} = 0$ cioè $u = m$. \square

Teorema 2.11.4. Sia (u_n) una successione monotona crescente di funzioni armoniche in un aperto connesso limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e si supponga che esista $y \in \Omega$ tale che la successione $(u_n(y))$ sia limitata. Allora la successione (u_n) converge uniformemente ad una funzione armonica in ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Dimostrazione. Poiché la successione è monotona

$$\exists u(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) \leq +\infty.$$

In particolare $u(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(y) < +\infty$ cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu > 0 : \quad \forall n, m \geq \nu, \quad n > m \quad 0 \leq u_n(y) - u_m(y) < \varepsilon.$$

Si considerino ora $\Omega' \subset\subset \Omega$ e Ω'' connesso tale che $\Omega' \cup \{y\} \subset \Omega'' \subset\subset \Omega$. Per la disuguaglianza di Harnack (2.6), se $n, m \geq \nu$

$$\sup_{z \in \Omega''} |u_n(z) - u_m(z)| \leq c(N, \Omega'', \Omega) \cdot \inf_{z \in \Omega''} |u_n(z) - u_m(z)| \leq c(N, \Omega'', \Omega) \cdot \varepsilon$$

che è la condizione di Cauchy per la convergenza uniforme. Quindi la successione (u_n) converge uniformemente in Ω' e, poiché il limite uniforme di funzioni armoniche è una funzione armonica, vale la tesi. \square

2.12 Stima (interna) a priori del gradiente di una funzione armonica

Teorema 2.12.1. *Sia Ω aperto connesso limitato di \mathbb{R}^N ; u armonica in Ω ed ivi limitata. Allora per ogni compatto $K \subset \Omega$ si ha*

$$\sup_K |\nabla u| \leq \frac{N}{d_K} \sup_{\Omega} |u|,$$

dove $d_K = \text{dist}(K, \partial\Omega) > 0$.

Dimostrazione. Osserviamo che $\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_N u)$ è una funzione vettoriale armonica in Ω .

Sia $\overline{B}_R(y) \subset \Omega$, allora, per la proprietà del valor medio,

$$\begin{aligned} \nabla u(y) &= \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} \nabla u(x) d\mathcal{L}^N(x) \\ &= \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{\partial B_R(y)} u(\xi) \nu(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \quad (\text{per il teorema della divergenza}) \end{aligned}$$

e quindi

$$|\nabla u(y)| \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \sup_{\Omega} |u| N \omega_N R^{N-1} = \frac{N}{R} \sup_{\Omega} |u|.$$

Sia, ora, $y \in \Omega$ e sia $d_y = d(y, \partial\Omega)$ (funzione continua di y); per ogni $0 < R < d_y$ si ha $\overline{B}_R(y) \subset \Omega$ e quindi (per quanto già provato)

$$|\nabla u(y)| \leq \frac{N}{R} \sup_{\Omega} |u|,$$

e per $R \rightarrow d_y$:

$$|\nabla u(y)| \leq \frac{N}{d_y} \sup_{\Omega} |u| \quad \forall y \in \Omega.$$

Sia, infine, K compatto, contenuto in Ω e sia

$$d_K = \min_{y \in K} d_y = \text{dist}(K, \partial\Omega) > 0;$$

allora

$$|\nabla u(y)| \leq \frac{N}{d_K} \sup_{\Omega} |u| \quad \text{per ogni } y \in K,$$

e quindi

$$\sup_K |\nabla u| \leq \frac{N}{d_K} \sup_{\Omega} |u|. \quad \square$$

Teorema 2.12.2. (Teorema di Liouville)

Se u è armonica e limitata in \mathbb{R}^N , allora u è costante.

Dimostrazione. Basta applicare la stima interna per il gradiente di u con $K = \overline{B}_R(0)$ e $\Omega = B_{2R}(0)$; allora

$$\sup_{\overline{B}_R(0)} |\nabla u| \leq \frac{N}{R} \sup_{B_{2R}(0)} |u|$$

e per $R \rightarrow +\infty$ si ha $\sup_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| = 0$, pertanto u è costante in \mathbb{R}^N . \square

Teorema 2.12.3. (Teorema di compattezza per successioni di funzioni armoniche)

Sia (u_j) una successione di funzioni armoniche in Ω (aperto connesso limitato di \mathbb{R}^N); se (u_j) è equilimitata in Ω , allora esiste una successione estratta da (u_j) che converge uniformemente ad una funzione (necessariamente) armonica sui sottoinsiemi compatti di Ω .

Dimostrazione. Dalla stima interna per il gradiente di una funzione armonica, segue, stante la equilimitatezza di (u_j) , che la successione (∇u_j) è equilimitata su ogni compatto contenuto in Ω :

$\forall K$ compatto, $K \subset \Omega$:

$$\sup_K |\nabla u_j| \leq \frac{N}{d_K} \sup_{\Omega} |u_j| \leq c \quad (c \text{ indipendente da } j).$$

Pertanto, per il teorema di Lagrange, la successione (u_j) è equilipschitziana e quindi equicontinua in ogni compatto contenuto in Ω .

La tesi segue dal teorema di compattezza di Ascoli-Arzelà. \square

2.13 Il Problema di Dirichlet: Il metodo delle funzioni subarmoniche (di O. Perron, 1923)

Siamo ora in grado di affrontare la questione dell'esistenza della soluzione per il problema (classico) di Dirichlet in un "arbitrario" Ω aperto connesso limitato di \mathbb{R}^N . La trattazione che seguiremo è quella del "metodo di Perron delle funzioni subarmoniche" che si fonda sul principio del massimo e sulla risolubilità del problema di Dirichlet su palle di \mathbb{R}^N .

Il metodo è semplice, elegante e separa il problema dell'esistenza nell'aperto Ω dal comportamento della soluzione sulla frontiera $\partial\Omega$.

Per completezza di esposizione del metodo ricordiamo la seguente definizione:

Definizione 2.13.1.

$$u \text{ subarmonica in } \Omega \stackrel{\text{def}}{\iff} u \in C^o(\Omega) \quad e \quad \forall \overline{B}_R(y) \subset \Omega$$

$$u(y) \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} u(x) d\mathcal{L}^N(x).$$

Come già fatto, indicheremo con $\sigma(\Omega)$ la classe delle funzioni subarmoniche in Ω .

Ricordiamo, inoltre, il seguente

Lemma 2.13.2. (*Principio del max debole*)

Se Ω è aperto connesso e limitato di \mathbb{R}^N e $u \in \sigma(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, allora

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Definizione 2.13.3. Si definisce **sollevamento armonico di una funzione subarmonica** $u \in \sigma(\Omega)$ **relativo a** $B_R(y)$, con $\overline{B}_R(y) \subset \Omega$, la funzione così definita

$$u_{y,R}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega \setminus B_R(y) \\ \text{l'unica soluzione di } \begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B_R(y) \\ v = u & \text{su } \partial B_R(y) \end{cases} & \text{se } x \in \overline{B}_R(y). \end{cases}$$

Lemma 2.13.4. Sia $u \in \sigma(\Omega)$ e $\overline{B}_R(y) \subset \Omega$; allora

- (i) $u(x) \leq u_{y,R}(x) \quad \forall x \in \Omega$;
- (ii) $u_{y,R} \in \sigma(\Omega)$.

Dimostrazione.

- (i) In $\Omega \setminus B_R(y)$ $u = u_{y,R}$; inoltre, poiché $u - u_{y,R} \in \sigma(B_R(y)) \cap C^0(\overline{B}_R(y))$ dal Lemma 2.13.2 segue che

$$\sup_{\overline{B}_R(y)} (u - u_{y,R}) = \sup_{\partial B_R(y)} (u - u_{y,R}) = 0,$$

e quindi

$$u - u_{y,R} \leq 0 \quad \text{in } B_R(y).$$

- (ii) $u_{y,R} \in C^0(\Omega)$, inoltre in $\Omega \setminus \overline{B}_R(y)$ $u_{y,R} = u$ e per u vale la disuguaglianza del valor medio; in $B_R(y)$, $u_{y,R}$ è addirittura armonica e quindi soddisfa la uguaglianza del valor medio. Per i punti $\zeta \in \partial B_R(y)$ si ha

$$\begin{aligned} u_{y,R}(\zeta) = u(\zeta) &\leq \frac{1}{\omega_N t^N} \int_{B_t(\zeta)} u(x) d\mathcal{L}^N(x) \\ &\leq (\text{per (i)}) \quad \frac{1}{\omega_N t^N} \int_{B_t(\zeta)} u_{y,R}(x) d\mathcal{L}^N(x) \end{aligned}$$

per ogni $t > 0$ sufficientemente piccolo. □

Definizione 2.13.5. Sia Ω aperto connesso limitato di \mathbb{R}^N ; $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ limitata; posto

$$m = \inf_{\partial\Omega} \varphi, \quad M = \sup_{\partial\Omega} \varphi,$$

definiamo la classe

$$\sigma_\varphi(\overline{\Omega}) := \{u \in \sigma(\Omega) \cap C^o(\overline{\Omega}); \quad u \leq \varphi \quad \text{su} \quad \partial\Omega\}.$$

Osservazione 2.13.6.

$$\sigma_\varphi(\overline{\Omega}) \neq \emptyset \quad (\text{in quanto le costanti } \leq m \text{ sono in } \sigma_\varphi(\overline{\Omega})).$$

Lemma 2.13.7. Se $u_1, u_2, \dots, u_k \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega})$ allora anche

$$v = \max \{u_1, u_2, \dots, u_k\} \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega}).$$

Dimostrazione. È chiaro che $v \in C^o(\overline{\Omega})$ e $v \leq \varphi$ su $\partial\Omega$; inoltre per ogni $\overline{B}_R(y) \subset \Omega$:

$$\begin{aligned} v(y) &= \max \{u_1(y), \dots, u_k(y)\} \\ &\leq \max \left\{ \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} u_1(x) d\mathcal{L}^N(x), \dots, \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} u_k(x) d\mathcal{L}^N(x) \right\} \\ &\leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} v(x) d\mathcal{L}^N(x). \quad \square \end{aligned}$$

Osservazione 2.13.8.

$$\forall u \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega}) : \quad u(x) \leq M \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Infatti per il Lemma 2.13.2,

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u \leq M.$$

Definizione 2.13.9. Ha senso allora definire la seguente **funzione (di Perron)**:

$$\begin{aligned} W_\varphi : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto W_\varphi(x) := \sup_{u \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega})} u(x). \end{aligned}$$

Lemma 2.13.10. La funzione di Perron W_φ è armonica in Ω .

Dimostrazione. Sia $y \in \Omega$ e $\overline{B}_R(y) \subset \Omega$; sia $0 < R' < R$ e consideriamo una successione $(x_j) \subset B_{R'}(y)$. Risulta

$$W_\varphi(x_j) = \sup_{u \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega})} u(x_j)$$

pertanto per le proprietà caratteristiche dell'estremo superiore si ha

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists u_j^k \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega}) : \quad W_\varphi(x_j) - \frac{1}{k} < u_j^k(x_j) \leq W_\varphi(x_j)$$

e quindi

$$\exists u_j^k \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega}) \quad (j, k = 1, 2, \dots) : \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} u_j^k(x_j) = W_\varphi(x_j) \quad \forall j = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Consideriamo (fissato $k \in \mathbb{N}$)

$$u^k = \max \{u_1^k, \dots, u_k^k\}.$$

Per il Lemma 2.13.7 risulta $u^k \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega})$; inoltre

$$u_j^k(x_j) \leq u^k(x_j) \leq W_\varphi(x_j) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq j \leq k,$$

e quindi, per confronto, da (2.7), si ha che

$$\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(x_j) = W_\varphi(x_j) \quad \forall j = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

La successione (u^k) può essere assunta *equilimitata* con $m \leq u^k \leq M$ (se necessario si consideri $\max \{u^k, m\} \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega})$ per il Lemma 2.13.7, e verificante ovviamente ancora (2.8) in quanto $\forall j \in \mathbb{N} \quad u^k(x_j) \leq \max \{u^k(x_j), m\} \leq W_\varphi(x_j)$).

Consideriamo, per ogni k , il sollevamento armonico $u_{y,R}^k$ di u^k relativo a $B_R(y)$; denotiamo ancora, per semplicità, con (u^k) tale successione equilimitata.

In definitiva la successione è equilimitata, è formata da funzioni di $\sigma_\varphi(\overline{\Omega})$, soddisfa (2.8) ed è tale che in $B_R(y)$ le funzioni u^k sono armoniche.

Per il teorema di compattezza 2.12.3 esiste una funzione *armonica* W tale che (a meno di successioni estratte)

$$u^k \rightrightarrows W \text{ in } \overline{B}_{R'}(y).$$

Per (2.8)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(x_j) = W_\varphi(x_j) = W(x_j) \quad \forall j = 1, 2, \dots$$

per cui W_φ coincide con una funzione armonica W nei punti della successione (x_j) fissata in $B_{R'}(y)$ (osserviamo che W dipende a-priori dalla scelta della successione (x_j) e dalla successione estratta da (u^k)). Sia, ora, $x \in B_{R'}(y)$ e sia $(x_j) \subset B_{R'}(y)$ tale che $x_j \rightarrow x_1 = x$; si ha, per la continuità della corrispondente W ,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} W_\varphi(x_j) = \lim_{j \rightarrow +\infty} W(x_j) = W(x_1) = W_\varphi(x_1),$$

cioè W_φ è *continua* in $B_{R'}(y)$. Sia infine (x_j) una successione densa in $B_{R'}(y)$. Allora W_φ coincide con una funzione armonica in ogni x_j e quindi per la continuità, in ogni punto di $B_{R'}(y)$. Ciò significa che W_φ è armonica in un intorno di y , e quindi in tutto Ω . \square

Il risultato precedente esibisce una funzione armonica W_φ che è una possibile soluzione del problema classico di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nel metodo di Perron lo studio del comportamento su $\partial\Omega$ della soluzione è essenzialmente separato dal problema dell'esistenza.

L'assunzione con continuità del valore alla frontiera è legata alle proprietà geometriche di $\partial\Omega$ attraverso il concetto di funzione barriera.

Definizione 2.13.11. Sia $\xi_0 \in \partial\Omega$; una funzione $Q_{\xi_0} \in \sigma(\Omega) \cap C^o(\overline{\Omega})$ tale che

$$Q_{\xi_0}(\xi_0) = 0, \quad Q_{\xi_0}(\xi) < 0 \quad \forall \xi \in \partial\Omega \setminus \{\xi_0\}$$

si chiama **funzione barriera relativa al punto** ξ_0 e all'operatore di Laplace (osserviamo che, per il Lemma 2.13.2, risulta $Q_{\xi_0} \leq 0$ in $\overline{\Omega}$).

Il punto di frontiera $\xi_0 \in \partial\Omega$ si dice **regolare** se esiste una funzione barriera relativa a ξ_0 , altrimenti ξ_0 si dice **eccezionale**.

Lemma 2.13.12. Sia $\xi_0 \in \partial\Omega$ regolare; $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ limitata su $\partial\Omega$ e continua in ξ_0 ; allora

$$\liminf_{\substack{x \rightarrow \xi_0 \\ x \in \Omega}} W_\varphi(x) \geq \varphi(\xi_0) \quad {}^{11} \quad (i)$$

ed anche

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow \xi_0 \\ x \in \Omega}} W_\varphi(x) = \varphi(\xi_0). \quad (ii)$$

Dimostrazione. (i) Sia Q_{ξ_0} la funzione barriera relativa a ξ_0 ; siano $\varepsilon > 0$, $k > 0$. La funzione u definita da

$$u(x) := \varphi(\xi_0) - \varepsilon + kQ_{\xi_0}(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

é di classe $\sigma(\Omega) \cap C^o(\overline{\Omega})$, e soddisfa

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \varphi(\xi_0) - \varepsilon + kQ_{\xi_0}(\xi) \leq \varphi(\xi_0) - \varepsilon \quad \forall \xi \in \partial\Omega, \\ u(\xi_0) &= \varphi(\xi_0) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Dimostriamo che $u \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega})$, pertanto proviamo che $u \leq \varphi$ su $\partial\Omega$. Infatti, poiché φ è continua in ξ_0 , in corrispondenza di $\varepsilon > 0$ fissato, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\forall \xi \in \partial\Omega : |\xi - \xi_0| < \delta_\varepsilon \implies |\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)| < \varepsilon,$$

¹¹

$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) := \sup_{r>0} \inf_{0<|x-x_0|<r} f(x) \quad (\text{minimo limite di } f \text{ per } x \rightarrow x_0)$

$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) := \inf_{r>0} \sup_{0<|x-x_0|<r} f(x) \quad (\text{massimo limite di } f \text{ per } x \rightarrow x_0)$

da cui

$$\varphi(\xi) > \varphi(\xi_0) - \varepsilon \geq u(\xi).^{12}$$

Quindi

$$u \leq \varphi \quad \text{su } \{|\xi - \xi_0| < \delta_\varepsilon\} \cap \partial\Omega.$$

Poiché $Q_{\xi_0}(\xi)$ è limitata superiormente da un numero reale negativo per $\{|\xi - \xi_0| \geq \delta_\varepsilon\} \cap \partial\Omega$, possiamo trovare $k = k(\varepsilon) > 0$ sufficientemente grande in modo che $u \leq \varphi$ valga anche per $\{|\xi - \xi_0| \geq \delta_\varepsilon\} \cap \partial\Omega$.

Allora $u \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega})$ e di conseguenza $u(x) \leq W_\varphi(x)$ per ogni $x \in \Omega$.

Ne segue che

$$\varphi(\xi_0) - \varepsilon = u(\xi_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi_0 \\ x \in \Omega}} u(x) \leq \liminf_{\substack{x \rightarrow \xi_0 \\ x \in \Omega}} W_\varphi(x),$$

da cui segue la tesi per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

(ii) È sufficiente provare che

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow \xi_0 \\ x \in \Omega}} W_\varphi(x) \leq \varphi(\xi_0).$$

Proviamo che

$$W_\varphi(x) \leq -W_{-\varphi}(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Risulta

$$-W_{-\varphi}(x) = - \sup_{u \in \sigma_{-\varphi}(\overline{\Omega})} u(x) = \inf_{u \in \sigma_{-\varphi}(\overline{\Omega})} (-u(x)) = \inf_{-U \in \sigma_{-\varphi}(\overline{\Omega})} U(x)$$

dove si è posto $U(x) = -u(x)$. Osservato che per $u \in \sigma_{-\varphi}(\overline{\Omega})$ e $-U \in \sigma_{-\varphi}(\overline{\Omega})$ risulta $u - U \leq 0$ su $\partial\Omega$ e $u - U \in \sigma(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, per il Lemma 2.13.2 si ha $u - U \leq 0$ in $\overline{\Omega}$ e quindi

$$\sup_{u \in \sigma_{-\varphi}(\overline{\Omega})} u(x) \leq \inf_{-U \in \sigma_{-\varphi}(\overline{\Omega})} U(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.9)$$

cioè

$$W_\varphi(x) \leq -W_{-\varphi}(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Applicando (i) a $W_{-\varphi}$ si ha:

$$\liminf_{\substack{x \rightarrow \xi_0 \\ x \in \Omega}} W_{-\varphi}(x) \geq -\varphi(\xi_0),$$

e quindi

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow \xi_0 \\ x \in \Omega}} W_\varphi(x) \leq \limsup_{\substack{x \rightarrow \xi_0 \\ x \in \Omega}} (-W_{-\varphi}(x)) = - \liminf_{\substack{x \rightarrow \xi_0 \\ x \in \Omega}} W_{-\varphi}(x) \leq \varphi(\xi_0). \quad \square$$

¹²evidentemente per provare la (i) è sufficiente supporre φ semicontinua inferiormente in $\xi_0 \in \partial\Omega$.

Osservazione 2.13.13. La relazione (2.9) vuol dire che la classe delle $u \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega})$ e quella delle $-U \in \sigma_{-\varphi}(\overline{\Omega})$ (cioè delle U superarmoniche, regolari, con $U \geq \varphi$ su $\partial\Omega$) sono separate.

Teorema 2.13.14. (*Teorema di esistenza, unicità e dipendenza continua della soluzione dal dato, per il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace*)
Sia Ω aperto connesso limitato di \mathbb{R}^N ; il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

è risolubile in $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ per ogni dato $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ se e solo se ogni $\xi_0 \in \partial\Omega$ è regolare. La soluzione è la funzione di Perron W_φ . Inoltre (per il teorema del massimo modulo)

$$\sup_{\overline{\Omega}} |W_\varphi| = \sup_{\partial\Omega} |\varphi|.$$

Dimostrazione. Sia $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ e ogni $\xi_0 \in \partial\Omega$ sia regolare. Allora, per il Lemma 2.13.10, W_φ è armonica in Ω e, per il Lemma 2.13.12,

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow \xi_0 \\ x \in \Omega}} W_\varphi(x) = \varphi(\xi_0) \quad \forall \xi_0 \in \partial\Omega.$$

Ciò implica che, se $\partial\Omega$ è formata da punti regolari e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, allora $W_\varphi \in C^0(\overline{\Omega})$ quando poniamo $W_\varphi = \varphi$ su $\partial\Omega$.

Quindi

$$W_\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$$

e

$$\begin{cases} \Delta W_\varphi = 0 & \text{in } \Omega \\ W_\varphi = \varphi & \text{su } \partial\Omega \end{cases}.$$

Viceversa, supponiamo che il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

sia risolubile in $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ per ogni dato $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Sia $\xi_0 \in \partial\Omega$. Consideriamo $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$\varphi(\xi) = -|\xi - \xi_0| \quad \forall \xi \in \partial\Omega.$$

Si ha $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$; sia $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ l'unica soluzione di

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } \Omega \\ v(\xi) = -|\xi - \xi_0| & \forall \xi \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Definita

$$Q_{\xi_0}(x) = v(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

si riconosce facilmente che Q_{ξ_0} è una funzione barriera relativa a ξ_0 , sicché ξ_0 è regolare. \square

Rimane l'importante questione: per quali Ω (aperti connessi limitati di \mathbb{R}^N) i punti di frontiera sono regolari?

Sono note (generalmente) condizioni sufficienti in termini delle proprietà geometriche (locali) di $\partial\Omega$.

Illustriamo una di queste condizioni.

Definizione 2.13.15. Ω aperto connesso limitato di \mathbb{R}^N ha la proprietà della palla esterna se

$$\forall \xi_0 \in \partial\Omega \quad \exists B_R(y) : \quad \overline{B_R(y)} \cap \overline{\Omega} = \{\xi_0\}.$$

Proposizione 2.13.16. Se Ω ha la proprietà della palla esterna, allora ogni punto di $\partial\Omega$ è regolare.

Dimostrazione. Sia $\xi_0 \in \partial\Omega$ e $B_R(y)$ tale che

$$\overline{B_R(y)} \cap \overline{\Omega} = \{\xi_0\}.$$

Definiamo per ogni $x \in \overline{\Omega}$

$$Q_{\xi_0}(x) = \begin{cases} |x - y|^{2-N} - R^{2-N} & \text{se } N \geq 3 \\ \log \frac{R}{|x - y|} & \text{se } N = 2. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che Q_{ξ_0} è una funzione barriera relativa a ξ_0 . □

Osservazione 2.13.17. Osserviamo che se Ω è *strettamente convesso* (nel senso che per ogni $\xi_0 \in \partial\Omega$ esiste un iperpiano Π_{ξ_0} tale che $\Pi_{\xi_0} \cap \overline{\Omega} = \{\xi_0\}$) allora Ω ha la proprietà della palla esterna.

Se $N \geq 3$ gli aperti Ω con “spine rientranti” (che puntano in Ω) non sono ammissibili per il problema classico di Dirichlet, come mostra un argomento di Lebesgue, per il quale si può consultare e.g. [5] alle pp. 77-78.

2.14 Potenziale Newtoniano e problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson

Abbiamo definito, per $N \geq 3$, la soluzione fondamentale (di polo x^o) per il Δ :

$$\Gamma(x - x^o) = \frac{1}{N(2 - N)\omega_N} |x - x^o|^{2-N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{x^o\}$$

e inoltre, per $\overline{\Omega}$ connesso, compatto di \mathbb{R}^N , di classe C^1 a tratti, e per $u \in C^2(\overline{\Omega})$ abbiamo provato la formula di rappresentazione di Green (Teorema 2.6.1):

$$u(x^o) = \int_{\Omega} \Gamma(x - x^o) \Delta_x u(x) d\mathcal{L}^N(x) + \int_{\partial\Omega} \left[u(\xi) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(\xi - x^o) - \Gamma(\xi - x^o) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) \right] d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)$$

per ogni $x^o \in \Omega$.

Definito il **potenziale (di dominio) Newtoniano di densità f** , con f funzione limitata e integrabile in Ω ,

$$w(x) := \int_{\Omega} \Gamma(x-y) f(y) d\mathcal{L}^N(y) \quad \forall x \in \Omega,$$

dalla rappresentazione precedente risulta che u è somma del potenziale Newtoniano (di densità $\Delta_x u$) e di una funzione armonica.

Studiamo pertanto il potenziale Newtoniano di densità f ; in particolare vediamo sotto quali ipotesi sulla densità f il potenziale Newtoniano è C^2 , al fine di trovare una soluzione (particolare) dell'equazione di Poisson.

Lemma 2.14.1. *Sia Ω aperto connesso limitato di \mathbb{R}^N , f limitata e integrabile in Ω ; allora posto*

$$w(x) := \int_{\Omega} \Gamma(x-y) f(y) d\mathcal{L}^N(y) \quad \forall x \in \Omega,$$

si ha

$$w \in C^1(\overline{\Omega}) \quad e \quad \partial_i w(x) = \int_{\Omega} \partial_i \Gamma(x-y) f(y) d\mathcal{L}^N(y) \quad \forall x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N$$

dove $\partial_i = \partial_{x_i}$.

Dimostrazione. Per $x \in \mathbb{R}^N$ poniamo

$$v(x) = \int_{\Omega} \partial_i \Gamma(x-y) f(y) d\mathcal{L}^N(y)$$

(v è ben definita perché $\partial_i \Gamma(x-y)$ è sommabile e f è limitata). Per provare che $w \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\partial_i w = v$, costruiamo una famiglia di funzioni $(w_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in C^1(\overline{\Omega})$ tale che per $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$w_\varepsilon \rightrightarrows w$$

e

$$\partial_i w_\varepsilon \rightrightarrows v.$$

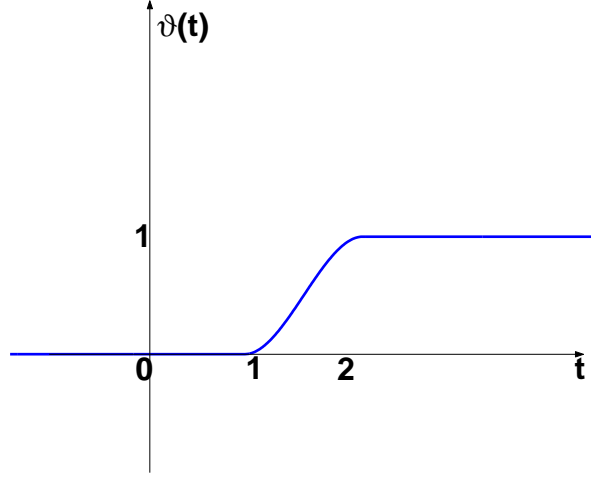
Per questo sia $\vartheta \in C^1(\mathbb{R})$ tale che

$$0 \leq \vartheta(t) \leq 1, \quad 0 \leq \vartheta'(t) \leq 2 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

(ad esempio

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 1 \\ 5 - 12t + 9t^2 - 2t^3 & \text{per } 1 < t < 2 \\ 1 & \text{per } t \geq 2 \end{cases} \quad).$$

Figura 2.1: Grafico della funzione ϑ

Definiamo per $\varepsilon > 0$

$$w_\varepsilon(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} \Gamma(x-y) \vartheta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) f(y) d\mathcal{L}^N(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Si ha $w_\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ (in quanto Γ è C^∞ e ϑ è C^1) e

$$w(x) - w_\varepsilon(x) = \int_{|x-y|\leq 2\varepsilon} \Gamma(x-y) \left[1 - \vartheta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right] f(y) d\mathcal{L}^N(y)$$

da cui

$$|w(x) - w_\varepsilon(x)| \leq \int_{\overline{B}_{2\varepsilon}(x)} |\Gamma(x-y)| d\mathcal{L}^N(y) \cdot \sup_{\Omega} |f|.$$

Risulta

$$\begin{aligned} \int_{\overline{B}_{2\varepsilon}(x)} |\Gamma(x-y)| d\mathcal{L}^N(y) &= \int_{\overline{B}_{2\varepsilon}(x)} \frac{1}{N(N-2)\omega_N} |x-y|^{2-N} d\mathcal{L}^N(y) \\ &= \frac{1}{N(N-2)\omega_N} \int_{\partial B_1(x)} d\mathcal{H}^{N-1}(\omega) \int_0^{2\varepsilon} \varrho^{2-N} \varrho^{N-1} d\mathcal{L}^1(\varrho) \\ &= \frac{1}{N-2} \left[\frac{\varrho^2}{2} \right]_0^{2\varepsilon} = \frac{4\varepsilon^2}{2(N-2)} = \frac{2\varepsilon^2}{N-2}. \end{aligned}$$

Quindi

$$|w(x) - w_\varepsilon(x)| \leq \int_{\overline{B}_{2\varepsilon}(x)} |\Gamma(x-y)| d\mathcal{L}^N(y) \cdot \sup_{\Omega} |f| = \sup_{\Omega} |f| \cdot \frac{2\varepsilon^2}{N-2}$$

da cui si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} w_\varepsilon = w \quad \text{uniformemente sui compatti di } \mathbb{R}^N \text{ (e quindi in } \overline{\Omega}\text{)}.$$

Ora proviamo che

$$\partial_i w_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{\Rightarrow} v.$$

Risulta

$$\begin{aligned} \partial_i w_\varepsilon(x) &= \int_{|x-y|>\varepsilon} \partial_i \left[\Gamma(x-y) \cdot \vartheta \left(\frac{|x-y|}{\varepsilon} \right) \right] f(y) d\mathcal{L}^N(y), \\ v(x) - \partial_i w_\varepsilon(x) &= \int_{|x-y|\leq 2\varepsilon} \partial_i \left\{ \Gamma(x-y) \left[1 - \vartheta \left(\frac{|x-y|}{\varepsilon} \right) \right] \right\} f(y) d\mathcal{L}^N(y) \\ &= \int_{|x-y|\leq 2\varepsilon} \left\{ \partial_i \Gamma(x-y) \left[1 - \vartheta \left(\frac{|x-y|}{\varepsilon} \right) \right] - \Gamma(x-y) \partial_i \vartheta \left(\frac{|x-y|}{\varepsilon} \right) \right\} f(y) d\mathcal{L}^N(y). \end{aligned}$$

Poiché

$$|\partial_i \Gamma(x-y)| \leq \frac{1}{N\omega_N} |x-y|^{1-N},$$

si ha

$$\int_{|x-y|\leq 2\varepsilon} |\partial_i \Gamma(x-y)| d\mathcal{L}^N(y) \leq \frac{1}{N\omega_N} \int_{\overline{B}_{2\varepsilon}(x)} |x-y|^{1-N} d\mathcal{L}^N(y) = 2\varepsilon$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} |v(x) - \partial_i w_\varepsilon(x)| &\leq \int_{|x-y|\leq 2\varepsilon} \left\{ |\partial_i \Gamma(x-y)| + |\Gamma(x-y)| \frac{2}{\varepsilon} \right\} d\mathcal{L}^N(y) \cdot \sup_{\Omega} |f| \\ &\leq \sup_{\Omega} |f| \cdot \left(2\varepsilon + \frac{2\varepsilon^2}{N-2} \cdot \frac{2}{\varepsilon} \right) \\ &\leq \sup_{\Omega} |f| \cdot \left(2\varepsilon + \frac{4\varepsilon}{N-2} \right) = \sup_{\Omega} |f| \cdot \left(\varepsilon \frac{2N}{N-2} \right). \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \partial_i w_\varepsilon = v \quad \text{uniformemente sui compatti di } \mathbb{R}^N \text{ (e quindi in } \overline{\Omega}). \quad \square$$

Lemma 2.14.2. Sia Ω aperto connesso limitato di \mathbb{R}^N , $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ ($0 < \alpha \leq 1$); allora $w \in C^2(\Omega)$ e

$$\partial_{ij} w(x) = \int_{\Omega_0} \partial_{ij} \Gamma(x-y) [f(y) - f(x)] d\mathcal{L}^N(y) - f(x) \int_{\partial\Omega_0} \partial_i \Gamma(x-\xi) \nu_j(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)$$

$$\forall x \in \Omega, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

dove Ω_0 è un qualsiasi aperto limitato contenente Ω , con frontiera di classe C^1 a tratti, e $f \equiv 0$ in $\Omega_0 \setminus \overline{\Omega}$. Inoltre

$$\Delta w(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Osserviamo che si può mostrare che

$$f \in C^0(\overline{\Omega}) \not\Rightarrow w \in C^2(\Omega)$$

(cfr. e.g. [13] a p. 54).

Dimostrazione. Sia $\vartheta \in C^1(\mathbb{R})$ la funzione introdotta nella dimostrazione del Lemma 2.14.1 e definiamo per $\varepsilon > 0$

$$v_\varepsilon(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} [\partial_i \Gamma(x-y)] \vartheta \left(\frac{|x-y|}{\varepsilon} \right) f(y) d\mathcal{L}^N(y) \quad \forall x \in \Omega.$$

v_ε è ben definita perché $\partial_i \Gamma$ è sommabile, ϑ ed f sono limitate; inoltre si riconosce che $v_\varepsilon \in C^1(\Omega)$.

Ricordiamo che per il Lemma 2.14.1, posto

$$v(x) = \int_{\Omega} \partial_i \Gamma(x-y) f(y) d\mathcal{L}^N(y),$$

si ha

$$v = \partial_i w \quad \text{in } \Omega,$$

inoltre si prova agevolmente che

$$|v(x) - v_\varepsilon(x)| \leq \sup_{\Omega} |f| \cdot 2\varepsilon,$$

da cui segue che

$$v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} v \quad \text{in } \Omega.$$

Posto

$$u(x) = \int_{\Omega_0} \partial_{ij} \Gamma(x-y) [f(y) - f(x)] d\mathcal{L}^N(y) - f(x) \int_{\partial\Omega_0} \partial_i \Gamma(x-\xi) \nu_j(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi),$$

osserviamo che u è ben definita, in particolare il primo integrale è finito in quanto

$$|\partial_{ij} \Gamma(x-y) [f(y) - f(x)]| \leq c_N |x-y|^{-N} [f]_{0,\alpha} |x-y|^\alpha = c_N [f]_{0,\alpha} |x-y|^{-N+\alpha}.$$

Proviamo che

$$\partial_j v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} u \quad \text{sui sottoinsiemi compatti di } \Omega \quad (j = 1, \dots, N),$$

ne seguirà che esiste $\partial_j v = u$, e poiché $v = \partial_i w$ si avrà in definitiva $w \in C^2(\Omega)$ e

$$u = \partial_{ij} w.$$

Proviamo dunque

$$\partial_j v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} u.$$

Si ha, posto per brevità

$$\vartheta_\varepsilon := \vartheta \left(\frac{|x-y|}{\varepsilon} \right),$$

$$\begin{aligned} \partial_j v_\varepsilon(x) &= \int_{\Omega} \partial_j ([\partial_i \Gamma(x-y)] \vartheta_\varepsilon) f(y) d\mathcal{L}^N(y) \\ &= \int_{\Omega_0} \partial_j ([\partial_i \Gamma(x-y)] \vartheta_\varepsilon) [f(y) - f(x)] d\mathcal{L}^N(y) \\ &\quad + f(x) \int_{\Omega_0} \partial_j ([\partial_i \Gamma(x-y)] \vartheta_\varepsilon) d\mathcal{L}^N(y) \\ &= \int_{\Omega_0} \partial_j ([\partial_i \Gamma(x-y)] \vartheta_\varepsilon) [f(y) - f(x)] d\mathcal{L}^N(y) \\ &\quad - f(x) \int_{\partial\Omega_0} \partial_i \Gamma(x-\xi) \nu_j(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \end{aligned}$$

purché $\varepsilon > 0$ sia sufficientemente piccolo (per cui $\vartheta_\varepsilon = 1$); al secondo integrale si è applicato il teorema della divergenza (Ω_0 ha frontiera di classe C^1 a tratti). Allora per sottrazione, per $2\varepsilon < d(x, \partial\Omega)$,

$$\begin{aligned} |u(x) - \partial_j v_\varepsilon(x)| &= \left| \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon} \partial_j \{ (1 - \vartheta_\varepsilon) \partial_i \Gamma(x-y) \} [f(y) - f(x)] d\mathcal{L}^N(y) \right| \\ &\leq \frac{2}{\varepsilon} \int_{\overline{B}_{2\varepsilon}(x)} |\partial_i \Gamma(x-y)| |f(y) - f(x)| d\mathcal{L}^N(y) \\ &\quad + \int_{\overline{B}_{2\varepsilon}(x)} |\partial_{ij} \Gamma(x-y)| |f(y) - f(x)| d\mathcal{L}^N(y) \\ &\leq [f]_{0,\alpha} \left(4 + \frac{N}{\alpha} \right) 2^\alpha \varepsilon^\alpha \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\partial_j v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} u \quad \text{sui sottoinsiemi compatti di } \Omega.$$

L'ultima disuguaglianza è ottenuta in virtù delle seguenti maggiorazioni:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\varepsilon} \int_{\overline{B}_{2\varepsilon}(x)} |\partial_i \Gamma(x-y)| |f(y) - f(x)| d\mathcal{L}^N(y) &\leq \frac{2}{\varepsilon} [f]_{0,\alpha} \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B_1(x)} d\mathcal{H}^{N-1}(\omega) \int_0^{2\varepsilon} \varrho^{1-N} \varrho^{N-1} \varrho^\alpha d\mathcal{L}^1(\varrho) \\ &= \frac{2}{\varepsilon} \frac{1}{N\omega_N} N\omega_N \frac{(2\varepsilon)^{\alpha+1}}{\alpha+1} [f]_{0,\alpha} \\ &= 4[f]_{0,\alpha} \frac{2^\alpha \varepsilon^\alpha}{\alpha+1} \leq 4[f]_{0,\alpha} 2^\alpha \varepsilon^\alpha, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\overline{B}_{2\varepsilon}(x)} |\partial_{ij} \Gamma(x-y)| |f(y) - f(x)| d\mathcal{L}^N(y) &\leq [f]_{0,\alpha} \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B_1(x)} d\mathcal{H}^{N-1}(\omega) \int_0^{2\varepsilon} \varrho^{-N} \varrho^{N-1} \varrho^\alpha d\mathcal{L}^1(\varrho) \\ &= [f]_{0,\alpha} N \frac{2^\alpha \varepsilon^\alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

Per provare che

$$\Delta w(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega,$$

fissato $x \in \Omega$ sia $\Omega_0 = B_R(x)$ contenente Ω . Da

$$\partial_{ij} w(x) = \int_{\Omega_0} \partial_{ij} \Gamma(x-y) [f(y) - f(x)] d\mathcal{L}^N(y) - f(x) \int_{\partial\Omega_0} \partial_i \Gamma(x-\xi) \nu_j(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)$$

$$i, j = 1, \dots, N,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\Delta w(x) &= \sum_{i=1}^N \partial_{ii} w(x) \\
&= \int_{B_R(x)} \sum_{i=1}^N \partial_{ii} \Gamma(x-y) [f(y) - f(x)] d\mathcal{L}^N(y) \\
&\quad - f(x) \int_{\partial B_R(x)} \sum_{i=1}^N \partial_i \Gamma(x-\xi) \nu_i(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\
^{13} &= 0 - f(x) \int_{|x-\xi|=R} \sum_{i=1}^N \frac{1}{N\omega_N} \frac{x_i - \xi_i}{|x-\xi|^N} \frac{\xi_i - x_i}{|x-\xi|} d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\
&= f(x) \int_{|x-\xi|=R} \sum_{i=1}^N \frac{1}{N\omega_N} \frac{(x_i - \xi_i)^2}{|x-\xi|^{N+1}} d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\
&= f(x) \frac{1}{N\omega_N} \int_{|x-\xi|=R} \frac{|x-\xi|^2}{|x-\xi|^{N+1}} d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\
&= f(x) \frac{1}{N\omega_N} R^{-N+1} N\omega_N R^{N-1} \\
&= f(x). \quad \square
\end{aligned}$$

¹³Risulta

$$\int_{B_R(x) \setminus \overline{B}_r(x)} \Delta_x \Gamma(x-y) [f(y) - f(x)] d\mathcal{L}^N(y) = 0 \quad (0 < r < R);$$

inoltre $\Delta_x \Gamma(x-y) [f(y) - f(x)]$ è sommabile in $B_R(x)$, pertanto

$$\int_{B_R(x)} \Delta_x \Gamma(x-y) [f(y) - f(x)] d\mathcal{L}^N(y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{B_R(x) \setminus \overline{B}_r(x)} \Delta_x \Gamma(x-y) [f(y) - f(x)] d\mathcal{L}^N(y) = 0.$$

Siamo ora in grado di risolvere il **problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson**:

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ ed $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ ($0 < \alpha \leq 1$) funzioni assegnate.

Sussiste il seguente teorema.

Teorema 2.14.3. *(Teorema di esistenza, unicità e dipendenza continua della soluzione dai dati f e φ , per il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson)*

Sia Ω aperto connesso limitato di \mathbb{R}^N con frontiera formata da punti tutti regolari. Per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ ($0 < \alpha \leq 1$) e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, esiste (unica) $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ soluzione di

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si ha

$$u = v + w$$

dove w è il potenziale Newtoniano di densità f , e v è l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } \Omega \\ v = \varphi - w & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Inoltre

$$\sup_{\overline{\Omega}} |u| \leq \text{cost} \cdot \left(\sup_{\partial\Omega} |\varphi| + \sup_{\overline{\Omega}} |f| \right)$$

(u dipende con continuità dai dati f e φ).

Dimostrazione. Poiché siamo nelle ipotesi del Lemma 2.14.1 e del Lemma 2.14.2 risulta

$$w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), \quad \Delta w = f.$$

Sia $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } \Omega \\ v = \varphi - w & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

(si noti che Ω ha frontiera formata da punti tutti regolari e $\varphi - w \in C^0(\partial\Omega)$).

Posto

$$u := v + w$$

risulta

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}), \quad \Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = \varphi \text{ su } \partial\Omega.$$

Inoltre poiché (per $N \geq 3$)

$$|w(x)| \leq \frac{1}{N(N-2)\omega_N} \int_{|x-y| < \text{diam } \Omega} |x-y|^{2-N} |f(y)| \, d\mathcal{L}^N(y)$$

ed f è limitata in $\overline{\Omega}$, si ha

$$\sup_{\overline{\Omega}} |w| \leq \text{cost} \cdot \sup_{\overline{\Omega}} |f|$$

(dove la costante dipende da N e da $\text{diam } \Omega$), e quindi

$$\sup_{\overline{\Omega}} |u| \leq \text{cost} \cdot \left(\sup_{\partial\Omega} |\varphi| + \sup_{\overline{\Omega}} |f| \right). \quad \square$$

Osservazione 2.14.4. Ci sono altri metodi per dimostrare il risultato di esistenza del Teorema 2.14.3 (cfr. [5]); il metodo variazionale negli Spazi di Hilbert sarà discusso nei Capitoli 9 e 8.

CAPITOLO 3

Elementi di Teoria delle Distribuzioni (Laurent Schwartz)

La teoria delle distribuzioni iniziata da S.L. Sobolev nel 1936 e pienamente formulata da L. Schwartz negli anni '50, è stata di fondamentale importanza sia in matematica pura che in matematica applicata, aprendo la strada all'introduzione di nozioni generalizzate di derivazione ed integrazione che consentono di aggirare alcune difficoltà della teoria classica e di dare una trattazione rigorosa dei fenomeni impulsivi o discontinui. Il concetto di distribuzione generalizza quello di funzione in molte situazioni in cui viene meno la regolarità della funzione in questione. Esempi di distribuzioni sono le funzioni impulsive, molto usate nell'elettromagnetismo ed in meccanica quantistica ancor prima che ne venisse data un'opportuna interpretazione matematica.

3.1 Distribuzioni

Introduciamo in $C_0^\infty(\Omega)$ la seguente nozione di convergenza (forte).

Definizione 3.1.1. Sia $(\varphi_j) \subset C_0^\infty(\Omega)$,

$$\varphi_j \rightarrow 0 \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \begin{cases} i) & \exists K \text{ compatto contenuto in } \Omega : \text{supp } \varphi_j \subset K, \quad \forall j \in \mathbb{N}; \\ ii) & D^\alpha \varphi_j \rightrightarrows 0 \text{ in } \Omega, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N. \end{cases}$$

Nel seguito indicheremo con $\mathcal{D}(\Omega)$ lo spazio vettoriale $C_0^\infty(\Omega)$ munito della convergenza prima definita e scriveremo $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} 0$.

Osserviamo che $\mathcal{D}(\Omega)$ è chiuso rispetto all'operazione di derivazione.

Esempio: La successione

$$\varphi_j(x_1) = e^{-j} \varrho(x_1) \sin(jx_1), \quad j \in \mathbb{N},$$

converge a zero in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Definizione 3.1.2. Sia $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ un funzionale lineare. Si dice che T è una **distribuzione** in Ω se

$$\forall (\varphi_j) \subset \mathcal{D}(\Omega), \quad \varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} 0 \implies T(\varphi_j) \xrightarrow{j} 0$$

(cioè se T è continuo rispetto alla convergenza in $\mathcal{D}(\Omega)$).

Lo spazio vettoriale delle distribuzioni in Ω si indica con $\mathcal{D}'(\Omega)$ (esso è il duale topologico di $\mathcal{D}(\Omega)$).

Teorema 3.1.3. (Caratterizzazione)

Sia $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ un funzionale lineare. Sono equivalenti:

(a) $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

(b) $\forall K$ compatto $\subset \Omega \quad \exists c_K > 0, j_K \in \mathbb{N}_0$:

$$|\langle T, \varphi \rangle| = |T(\varphi)| \leq c_K \sum_{|\alpha| \leq j_K} \sup_K |D^\alpha \varphi| \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(K).$$

Le funzioni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si chiamano funzioni *test* (delle distribuzioni). Inoltre si pone $\langle T, \varphi \rangle := T(\varphi)$.

La condizione (b) esprime il fatto che una distribuzione, localmente, agisce solo su un numero finito di derivate.

Dimostrazione.

(a) \implies (b) Dimostriamo che $\neg(b)$ (i.e. la negazione di (b)) $\implies \neg(a)$ e quindi supponiamo che esista K_0 compatto $\subset \Omega$ tale che

$$\forall c > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}_0 \quad \exists \varphi_{c,j} \in \mathcal{D}(K_0) \quad \wedge \quad |\langle T, \varphi_{c,j} \rangle| > c \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{K_0} |D^\alpha \varphi_{c,j}|.$$

Scelto $c = j \in \mathbb{N}$ e posto $\varphi_{c,j} = \varphi_j$ si ha

$$|\langle T, \varphi_j \rangle| > j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{K_0} |D^\alpha \varphi_j|$$

e, dalla linearità di T , risulta

$$\left| \left\langle T, \frac{\varphi_j}{j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{K_0} |D^\alpha \varphi_j|} \right\rangle \right| > 1.$$

Poniamo

$$\psi_j := \frac{\varphi_j}{j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{K_0} |D^\alpha \varphi_j|}.$$

Risulta $\psi_j \in \mathcal{D}(K_0)$ e inoltre $|D^\alpha \psi_j| \leq \frac{1}{j}$ per $|\alpha| \leq j$. Dunque

$$\psi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} 0,$$

ma, essendo $|T(\psi_j)| > 1$, non può aversi $T(\psi_j) \xrightarrow{j} 0$, e quindi è provata la $\neg(a)$.

(b) \implies (a) Sia $(\varphi_j) \subset \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} 0$; per i) (della Definizione 3.1.1) esiste

K compatto $\subset \Omega$ tale che $\text{supp } \varphi_j \subset K$ (quindi $\varphi_j \in \mathcal{D}(K)$) $\forall j \in \mathbb{N}$.
Da (b) segue che

$$\exists c_K > 0, j_K \in \mathbb{N}_0 \quad : \quad |\langle T, \varphi_j \rangle| \leq c_K \sum_{|\alpha| \leq j_K} \sup_K |D^\alpha \varphi_j|$$

e poiché per ii) (della Definizione 3.1.1) $D^\alpha \varphi_j \rightrightarrows 0$ deduciamo $|\langle T, \varphi_j \rangle| \rightarrow 0$, da cui segue la tesi. \square

Definizione 3.1.4. Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si dice che T è una distribuzione di **ordine finito** se verifica la seguente proprietà:

$$(b') \quad \exists j \in \mathbb{N}_0, \forall K \text{ compatto } \subset \Omega \exists c_K > 0 : |\langle T, \varphi \rangle| \leq c_K \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_K |D^\alpha \varphi| \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(K).$$

L'**ordine** è il minimo j per il quale vale (b') .

Osserviamo che se vale (b') vale anche (b) , ma non è vero il viceversa.

3.2 Esempi di distribuzioni

Sia $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ $\left(\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall K \text{ compatto } \subset \Omega \quad u \in L^1(K) \right)$; definiamo

$$T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto \langle T_u, \varphi \rangle := \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x).$$

Osserviamo che T_u è un funzionale lineare.

Sia K compatto $\subset \Omega$, allora $u \in L^1(K)$. Risulta

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(K) \quad |\langle T_u, \varphi \rangle| = \left| \int_K u(x) \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) \right| \leq \int_K |u(x)| d\mathcal{L}^N(x) \cdot \sup_K |\varphi|,$$

che è la (b') con $j = 0$. Quindi **ad ogni** $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ **si può associare una distribuzione** T_u (**distribuzione di ordine finito** (zero)).

Si usa scrivere (anche se impropriamente)

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$$

(nel senso che ad ogni $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ si associa una particolare distribuzione in $\mathcal{D}'(\Omega)$).

Nel seguito (vedi Proposizione 3.2.1) proveremo che

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subsetneq \mathcal{D}'(\Omega)$$

ovvero, l'immersione $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, $u \mapsto T_u$, è iniettiva (cioè se u_1 e u_2 sono in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tali che $T_{u_1} = T_{u_2}$, allora $u_1 = u_2$ q.o.) ma non è suriettiva.

Distribuzione di Dirac (di polo x^0).

Sia $x^0 \in \Omega$, definiamo il funzionale lineare

$$\begin{aligned} \delta_{x^0} : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \langle \delta_{x^0}, \varphi \rangle := \varphi(x^0). \end{aligned}$$

δ_{x^0} è una distribuzione di ordine finito (zero). Infatti per ogni K compatto $\subset \Omega$

$$|\langle \delta_{x^0}, \varphi \rangle| = |\varphi(x^0)| \leq \sup_K |\varphi| \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(K).$$

Per $x^0 = 0$ si userà la notazione δ al posto di δ_0 .

Proposizione 3.2.1.

$$\nexists u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) : \quad \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che esista $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Per ogni $j \in \mathbb{N}$ scegliamo

$$\varphi_j(x) = \varrho(jx) = \begin{cases} e^{\frac{1}{j^2|x|^2-1}} & \text{se } |x| < \frac{1}{j} \\ 0 & \text{se } |x| \geq \frac{1}{j} \end{cases} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N);$$

risulta allora

$$\varphi_j(0) = e^{-1} = \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \varphi_j(x) d\mathcal{L}^N(x) \quad \text{per ogni } j \in \mathbb{N}.$$

Poiché

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \varphi_j(x) d\mathcal{L}^N(x) = \int_{|x| < \frac{1}{j}} u(x) e^{\frac{1}{j^2|x|^2-1}} d\mathcal{L}^N(x),$$

si ha

$$e^{-1} = \int_{|x| < \frac{1}{j}} u(x) e^{\frac{1}{j^2|x|^2-1}} d\mathcal{L}^N(x) \quad \text{per ogni } j \in \mathbb{N}.$$

Risulta pertanto

$$e^{-1} = \left| \int_{|x| < \frac{1}{j}} u(x) e^{\frac{1}{j^2|x|^2-1}} d\mathcal{L}^N(x) \right| < \int_{|x| < \frac{1}{j}} |u(x)| d\mathcal{L}^N(x) \quad (3.1)$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$.

Tenuto conto che $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ segue che

$$\exists \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{|x| < \frac{1}{j}} |u(x)| d\mathcal{L}^N(x) = 0,$$

e quindi passando al limite per $j \rightarrow +\infty$ in (3.1) si ha

$$e^{-1} \leq 0,$$

manifestamente assurdo. \square

Osservazione 3.2.2. In generale non è possibile definire la moltiplicazione di due o più distribuzioni¹⁴. Quindi, in particolare, si rinuncia a definire δ^2 .

Osserviamo però che se $u \in C^\infty(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si definisce il prodotto $T_u T$ (o, brevemente, uT) con la formula

$$\langle T_u T, \varphi \rangle = \langle T, u\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La definizione è ben posta in quanto $u\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Si ha quindi per $u \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$T_u \delta = u(0)\delta$$

in quanto per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_u \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, u\varphi \rangle = u(0)\varphi(0) = \langle u(0)\delta, \varphi \rangle.$$

In particolare, per $u(x) = x$, si ha $x\delta = 0$, dove l'uguaglianza ha il significato che il prodotto tra la distribuzione associata alla funzione $u(x) = x$ e la distribuzione δ coincide con la distribuzione associata alla funzione nulla.

3.3 Derivate di una distribuzione e Teorema di Malgrange-Ehrenpreis

Definizione 3.3.1. (Definizione di derivata di ordine β di una distribuzione)

Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$. Si definisce

$$\begin{aligned} D^\beta T : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \langle D^\beta T, \varphi \rangle := (-1)^{|\beta|} \langle T, D^\beta \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Dalla definizione è facile riconoscere che $D^\beta T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

¹⁴cfr. **L. Schwartz**: *Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions*, C.R. Acad. Sci. Paris 239, pp. 847–848, 1954.

Osservazione 3.3.2. La Definizione 3.3.1 generalizza la formula di integrazione per parti per funzioni regolari. Infatti, ricordiamo che se $u \in C^1(\mathbb{R})$ risulta

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) \varphi'(x) d\mathcal{L}^1(x) = - \int_{\mathbb{R}} u'(x) \varphi(x) d\mathcal{L}^1(x)$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Quindi **nel senso delle distribuzioni** si può **sempre** parlare di derivate di **qualsiasi** ordine di una distribuzione e queste sono **ancora** distribuzioni.

Questa proprietà non ha riscontro nell'ambito delle funzioni e costituisce un valido argomento a favore della teoria delle distribuzioni.

Esempio 3.3.3. Sia $H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$ (funzione di Heaveside).

Siccome $H \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ calcoliamo T'_H . Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ risulta

$$\langle T_H, \varphi' \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi'(x) d\mathcal{L}^1(x) = -\varphi(0) = -\langle \delta, \varphi \rangle.$$

Pertanto $T'_H = \delta \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Questo esempio mostra che non è detto che le derivate di una distribuzione associata ad una funzione di L^1_{loc} siano ancora funzioni localmente sommabili.

Siamo ora in grado di chiarire (anche da un punto di vista semantico) il concetto di “soluzione fondamentale” dell'operatore di Laplace.

Sia in generale

$$P_\alpha = P_\alpha(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha \quad (\text{con } a_\alpha \in \mathbb{C})$$

un operatore differenziale a coefficienti costanti di ordine m .

Definizione 3.3.4. $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ si dice soluzione fondamentale per P_α se

$$P_\alpha E = \delta,$$

cioè se

$$\langle P_\alpha E, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$$

o, equivalentemente, se

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \langle E, D^\alpha \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Osservazione 3.3.5. Il termine “soluzione fondamentale” è giustificato dal fatto che se $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ è una soluzione fondamentale per P_α ed $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ allora si può provare (si veda il paragrafo 5.5) che $E * f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e si ha

$$P_\alpha(E * f) = (P_\alpha E) * f = \delta * f = f,$$

cioè $E * f$ è una soluzione di classe $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ dell'equazione differenziale non omogenea

$$P_\alpha u = f.$$

Riguardo all'esistenza di soluzioni fondamentali, sussiste il seguente notevole risultato:

Teorema 3.3.6. (*Teorema di Malgrange-Ehrenpreis (1954-55)*)

Ogni operatore differenziale a coefficienti costanti ha almeno una soluzione fondamentale.

Osservazione 3.3.7. Per quanto riguarda l'operatore di Laplace, osserviamo che per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, dalla formula di rappresentazione di Green (Teorema 2.6.1, applicato a φ e $x^0 = 0$) si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x) \Delta \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) = \varphi(0);$$

ciò mostra che Γ (o meglio, la distribuzione associata a $\Gamma \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$) è una soluzione fondamentale per l'operatore Δ di Laplace nel senso della precedente definizione. Infatti

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) : \quad \langle \Delta T_\Gamma, \varphi \rangle = \langle T_\Gamma, \Delta \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x) \Delta \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Osservazione 3.3.8. Rinviamo al paragrafo 10.4 per una breve introduzione alle “distribuzioni temperate”.

CAPITOLO 4

Spazi (di Lebesgue) $L^p(\Omega)$

4.1 Definizione e proprietà elementari degli spazi $L^p(\Omega)$

Definizione 4.1.1. Sia Ω sottoinsieme aperto connesso non vuoto di \mathbb{R}^N . Definiamo

$$L^1(\Omega) := \left\{ u; u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile, } \int_{\Omega} |u(x)| d\mathcal{L}^N(x) < +\infty \right\},$$

e per $p \in \mathbb{R}, 1 < p < +\infty$

$$L^p(\Omega) := \left\{ u; u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile, } |u|^p \in L^1(\Omega) \right\},$$

inoltre, per $1 \leq p < +\infty$, poniamo

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \|u\|_{p,\Omega} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{p}};$$

definiamo

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ u; u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile, } \exists c \in \mathbb{R}^+ : |u(x)| \leq c \text{ per q.o. } x \in \Omega \right\},$$

(funzioni essenzialmente limitate)

e poniamo

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|u\|_\infty = \|u\|_{\infty,\Omega} := \inf \left\{ c \in \mathbb{R}^+; |u(x)| \leq c \text{ per q.o. } x \in \Omega \right\}$$

(sup. essenziale di u).

Si precisa che gli elementi degli spazi $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq +\infty$) sono classi di equivalenza di funzioni, due funzioni della stessa classe di equivalenza differendo in un insieme di misura (di Lebesgue) nulla.

Osservazione 4.1.2. Se $u \in L^\infty(\Omega)$ allora $|u(x)| \leq \|u\|_\infty$ per q.o. $x \in \Omega$.

Dimostrazione. Esiste $(c_n) \subset \mathbb{R}^+$ tale che

$$c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|u\|_\infty$$

e per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste E_n misurabile, $|E_n| = 0$, tale che

$$|u(x)| \leq c_n \quad \forall x \in \Omega \setminus E_n.$$

Posto

$$E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n,$$

risulta

$$|E| = 0$$

e

$$|u(x)| \leq c_n \quad \forall x \in \Omega \setminus E, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ si ha pertanto

$$|u(x)| \leq \|u\|_\infty \quad \forall x \in \Omega \setminus E, \quad |E| = 0. \quad \square$$

Osservazione 4.1.3. $L^\infty(\Omega)$ è uno spazio vettoriale, inoltre

- (1) $\|u\|_\infty \geq 0$;
- (2) $\|u\|_\infty = 0 \iff u = 0$ q.o. in Ω ;
- (3) $\|\lambda u\|_\infty = |\lambda| \|u\|_\infty \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
- (4) $\|u + v\|_\infty \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty \quad \forall u, v \in L^\infty(\Omega)$.

Dimostrazione. Per provare la (4) osserviamo che

$$|u(x) + v(x)| \leq |u(x)| + |v(x)| \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty \quad \text{per q.o. } x \in \Omega,$$

da cui segue la tesi. \square

Quindi $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio normato.

Teorema 4.1.4. (Teorema di completezza)

$(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ è di Banach.

Dimostrazione. Sia $(u_n) \subset L^\infty(\Omega)$ di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_\infty$. Allora

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists \nu_k \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n, m > \nu_k \quad \|u_n - u_m\|_\infty < \frac{1}{k}.$$

Allora $\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists \nu_k \in \mathbb{N} \quad \exists E_k$ misurabile con $|E_k| = 0$ tale che

$$\forall n, m > \nu_k \quad |u_n(x) - u_m(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k;$$

posto

$$E := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k,$$

si ha

$$|E| = 0$$

ed inoltre

$$\forall n, m > \nu_k \quad |u_n(x) - u_m(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E.$$

Poiché \mathbb{R} è completo

$$u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \Omega \setminus E.$$

Resta così definita una funzione u misurabile (limite di funzioni misurabili). Osservato che

$$|u(x)| \leq |u_n(x) - u(x)| + |u_n(x)| \quad \forall x \in \Omega \setminus E$$

si riconosce che $u \in L^\infty(\Omega)$. Inoltre, poiché

$$\forall n, m > \nu_k \quad |u_n(x) - u_m(x)| < \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \setminus E,$$

si ha, passando al limite per $m \rightarrow +\infty$,

$$\|u_n - u\|_\infty < \frac{1}{k} \quad \forall n > \nu_k$$

e quindi

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \quad \text{in } (L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty).$$

Pertanto $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ è di Banach. □

4.2 Disuguaglianza di Hölder

Definizione 4.2.1. Siano $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq +\infty$ e $p' \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

p, p' si chiamano **esponenti coniugati**.

Ad esempio l'esponente coniugato di $p = 2, 1, +\infty$ sarà, rispettivamente, $p' = 2, +\infty, 1$.

Teorema 4.2.2. (*Disuguaglianza di Young*)

Sia $p \in \mathbb{R}$, $1 < p < +\infty$. Risulta

$$|a \cdot b| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'} \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

dove p' è l'esponente coniugato di p .

Dimostrazione. Se $a = 0$ o $b = 0$ la disuguaglianza è ovvia. Se a e $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dalla concavità della funzione \log si ha

$$\log \left(\frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'} \right) \geq \frac{1}{p} \log |a|^p + \frac{1}{p'} \log |b|^{p'} = \log |ab|$$

e passando all'esponenziale in base e , si ha la tesi. \square

Teorema 4.2.3. (*Disuguaglianza di Hölder*)

Sia $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq +\infty$; $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$. Risulta

$$u \cdot v \in L^1(\Omega) \quad \wedge \quad \|u \cdot v\|_1 \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_{p'}.$$

Dimostrazione. Se $p = 1$ o $p = +\infty$ la tesi è banale. Infatti se $p = 1$ allora $p' = +\infty$ e

$$\int_{\Omega} |u \cdot v| d\mathcal{L}^N(x) \leq \|v\|_{\infty} \int_{\Omega} |u| d\mathcal{L}^N(x) = \|v\|_{\infty} \|u\|_1.$$

Resta da provare la tesi per $1 < p < +\infty$.

Dalla disuguaglianza di Young si ha

$$|u(x)v(x)| \leq \frac{1}{p}|u(x)|^p + \frac{1}{p'}|v(x)|^{p'} \quad \text{per q.o. } x \in \Omega,$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x) \cdot v(x)| d\mathcal{L}^N(x) &\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u(x)|^p d\mathcal{L}^N(x) + \frac{1}{p'} \int_{\Omega} |v(x)|^{p'} d\mathcal{L}^N(x) \\ &= \frac{1}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{p'} \|v\|_{p'}^{p'} < +\infty \end{aligned}$$

e pertanto $u \cdot v \in L^1(\Omega)$ e

$$\|u \cdot v\|_1 \leq \frac{1}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{p'} \|v\|_{p'}^{p'}.$$

Allora preso λu con $\lambda > 0$, si ha

$$\|\lambda u \cdot v\|_1 \leq \frac{1}{p} \|\lambda u\|_p^p + \frac{1}{p'} \|v\|_{p'}^{p'},$$

da cui

$$\lambda \|u \cdot v\|_1 \leq \frac{\lambda^p}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{p'} \|v\|_{p'}^{p'}$$

e quindi

$$\|u \cdot v\|_1 \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{\lambda p'} \|v\|_{p'}^{p'}.$$

Sia

$$F(\lambda) := \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{\lambda p'} \|v\|_{p'}^{p'} \quad (\lambda > 0).$$

Osservato che da

$$F'(\lambda) = \frac{(p-1)}{p} \lambda^{p-2} \|u\|_p^p - \frac{1}{\lambda^2 p'} \|v\|_{p'}^{p'} = 0,$$

ovvero da

$$p'(p-1)\lambda^p \|u\|_p^p - p \|v\|_{p'}^{p'} = 0,$$

si ha

$$\lambda^p = \frac{\|v\|_{p'}^{p'}}{\|u\|_p^p},$$

e quindi

$$\lambda = \frac{\|v\|_{p'}^{\frac{p'}{p}}}{\|u\|_p},$$

con questa scelta di $\lambda > 0$ si ha

$$\begin{aligned} \|u \cdot v\|_1 &\leq \frac{1}{p} \frac{\|v\|_{p'}}{\|u\|_p^{p-1}} \|u\|_p^p + \frac{1}{p'} \frac{\|u\|_p}{\|v\|_{p'}^{\frac{p'}{p}}} \|v\|_{p'}^{p'} \\ &= \frac{1}{p} \|v\|_{p'} \|u\|_p + \frac{1}{p'} \|u\|_p \|v\|_{p'} \\ &= \|u\|_p \|v\|_{p'}. \quad \square \end{aligned}$$

Osservazione. In alternativa alla precedente dimostrazione, osservato che se $u = 0$ oppure $v = 0$ q.o. in Ω la disuguaglianza di Hölder è ovvia, si applichi la disuguaglianza di Young con $a = \frac{|u|}{\|u\|_p}$ e $b = \frac{|v|}{\|v\|_{p'}}$.

Osservazione 4.2.4. $L^p(\Omega)$ è uno spazio vettoriale (reale).

Dimostrazione. Per $p = 1$ è immediata;

per $1 < p < +\infty$ basta osservare che la funzione $x \mapsto |x|^p$ è convessa e quindi

$$\left| \frac{u+v}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2} (|u|^p + |v|^p)$$

pertanto

$$|u+v|^p \leq 2^{p-1} (|u|^p + |v|^p). \quad \square$$

Teorema 4.2.5. (*Disuguaglianza di Minkowski*)

Siano $u, v \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Allora

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Dimostrazione. Abbiamo già trattato il caso $p = +\infty$. Inoltre il caso $p = 1$ è facile da verificare.

Consideriamo dunque $1 < p < +\infty$. Si ha

$$\begin{aligned} \|u + v\|_p^p &= \int_{\Omega} |u + v|^p d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\Omega} |u + v|^{p-1} \cdot |u + v| d\mathcal{L}^N(x) \\ &\leq \int_{\Omega} |u + v|^{p-1} |u| d\mathcal{L}^N(x) + \int_{\Omega} |u + v|^{p-1} |v| d\mathcal{L}^N(x) \\ &\leq \|u\|_p \left(\int_{\Omega} |u + v|^{(p-1)p'} d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{p'}} + \|v\|_p \left(\int_{\Omega} |u + v|^{(p-1)p'} d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= (\|u\|_p + \|v\|_p) \|u + v\|_p^{\frac{p}{p'}}, \end{aligned}$$

dove si è applicata la disuguaglianza di Hölder a

$$|u + v|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) = L^{p'}(\Omega) \quad \text{e} \quad u, v \in L^p(\Omega).$$

Pertanto

$$\|u + v\|_p = \|u + v\|_p^{p - \frac{p}{p'}} \leq \|u\|_p + \|v\|_p. \quad \square$$

Osservazione 4.2.6. Si riconosce facilmente che

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

è una norma, tenuto conto anche della disuguaglianza di Minkowski.

4.3 Immersione continua $L^s(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$

Proposizione 4.3.1. Se $|\Omega| < +\infty$, per ogni $1 \leq r < s \leq +\infty$ si ha

$$L^s(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \quad (\text{immersione continua di } L^s(\Omega) \text{ in } L^r(\Omega))$$

e

$$\|u\|_r \leq |\Omega|^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}} \|u\|_s \quad \forall u \in L^s(\Omega)$$

(la topologia di $L^s(\Omega)$ è più forte di quella di $L^r(\Omega)$).

Dimostrazione. Sia $u \in L^s(\Omega)$, allora $|u|^r \in L^{\frac{s}{r}}(\Omega)$ e

$$\begin{aligned} \|u\|_r^r &= \int_{\Omega} |u(x)|^r d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\Omega} 1 \cdot |u(x)|^r d\mathcal{L}^N(x) \\ &\leq \left(\int_{\Omega} d\mathcal{L}^N(x) \right)^{1 - \frac{r}{s}} \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{r \frac{s}{r}} d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{r}{s}} = |\Omega|^{1 - \frac{r}{s}} \|u\|_s^r \end{aligned}$$

e quindi

$$\|u\|_r \leq |\Omega|^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}} \|u\|_s.$$

□

Osservazione 4.3.2. Nella proposizione precedente l'ipotesi $|\Omega| < +\infty$ non può essere eliminata. Infatti sia $N = 1$ e $\Omega =]1, +\infty[$; poiché

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s} d\mathcal{L}^1(x) \begin{cases} \text{diverge} & \text{per } s = 1 \\ \text{converge} & \text{per } s > 1 \end{cases}$$

si ha

$$\frac{1}{x} \notin L^1(]1, +\infty[)$$

ma

$$\forall s > 1 \quad \frac{1}{x^s} \in L^1(]1, +\infty[), \quad \text{ovvero} \quad \frac{1}{x} \in L^s(]1, +\infty[).$$

4.4 Disuguaglianza di interpolazione

Teorema 4.4.1. (*Disuguaglianza di interpolazione*)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto connesso, $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, $1 \leq p < q \leq +\infty$. Allora

$$u \in L^r(\Omega) \quad \forall r \in \mathbb{R}, \quad p \leq r \leq q$$

ed inoltre

$$\|u\|_r \leq \|u\|_p^\alpha \cdot \|u\|_q^{1-\alpha}$$

dove $\alpha \in [0, 1]$ è tale che $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.

Dimostrazione. Sia $\alpha \in [0, 1]$ ed $r \in \mathbb{R}$ tale che $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$. Si ha

$$\|u\|_r^r = \int_{\Omega} |u(x)|^r d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\Omega} |u(x)|^{\alpha r} |u(x)|^{(1-\alpha)r} d\mathcal{L}^N(x).$$

Osservato che

$$u \in L^p(\Omega) \implies |u|^{\alpha r} \in L^{\frac{p}{\alpha r}}(\Omega)$$

$$u \in L^q(\Omega) \implies |u|^{(1-\alpha)r} \in L^{\frac{q}{(1-\alpha)r}}(\Omega)$$

e che $\frac{\alpha r}{p} + \frac{(1-\alpha)r}{q} = 1$ si ha, per la disuguaglianza di Hölder,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u(x)|^{\alpha r} |u(x)|^{(1-\alpha)r} d\mathcal{L}^N(x) \\ & \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{\alpha r \cdot \frac{p}{\alpha r}} d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{\alpha r}{p}} \cdot \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{(1-\alpha)r \cdot \frac{q}{(1-\alpha)r}} d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{(1-\alpha)r}{q}} \\ & = \|u\|_p^{\alpha r} \cdot \|u\|_q^{(1-\alpha)r} \end{aligned}$$

ed elevando ad $\frac{1}{r}$ si ha la disuguaglianza di interpolazione, dalla quale si deduce anche che $u \in L^r(\Omega)$. \square

Proposizione 4.4.2. *Sia $0 < |\Omega| < +\infty$, $u \in L^\infty(\Omega)$; allora*

$$u \in L^r(\Omega) \quad \forall r \geq 1$$

e si ha

$$\exists \lim_{r \rightarrow +\infty} \|u\|_r = \|u\|_\infty.$$

Dimostrazione. Dall'immersione continua

$$\|u\|_r \leq |\Omega|^{\frac{1}{r}} \|u\|_\infty$$

si ha

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \|u\|_r \leq \|u\|_\infty.$$

Inoltre, per le proprietà del sup essenziale, poiché

$$\|u\|_\infty = \min \{c \in \mathbb{R}^+; \quad |u(x)| \leq c \text{ q.o. in } \Omega\},$$

risulta

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B_\varepsilon \text{ (misurabile) contenuto in } \Omega, \quad 0 < |B_\varepsilon| < +\infty \quad :$$

$$|u(x)| \geq \|u\|_\infty - \varepsilon \quad \forall x \in B_\varepsilon,$$

quindi

$$|u(x)|^r \geq (\|u\|_\infty - \varepsilon)^r \quad \forall x \in B_\varepsilon$$

da cui

$$\int_\Omega |u(x)|^r d\mathcal{L}^N(x) \geq \int_{B_\varepsilon} |u(x)|^r d\mathcal{L}^N(x) \geq |B_\varepsilon| (\|u\|_\infty - \varepsilon)^r$$

pertanto

$$\|u\|_r \geq |B_\varepsilon|^{\frac{1}{r}} (\|u\|_\infty - \varepsilon)$$

e quindi

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \|u\|_r \geq \|u\|_\infty - \varepsilon.$$

Pertanto si ha

$$\|u\|_\infty - \varepsilon \leq \liminf_{r \rightarrow +\infty} \|u\|_r \leq \limsup_{r \rightarrow +\infty} \|u\|_r \leq \|u\|_\infty \quad \forall \varepsilon > 0$$

e quindi la tesi. \square

4.5 Teorema di completezza di Fisher-Riesz

Teorema 4.5.1. (Teorema di Fisher-Riesz)

$$\forall 1 \leq p < +\infty \quad \left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p \right) \text{ è di Banach.}$$

Dimostrazione. Sia $1 \leq p < +\infty$, (u_n) di Cauchy in $\|\cdot\|_p$, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq \nu_\varepsilon \quad \|u_m - u_n\|_p < \varepsilon.$$

Allora esiste $(u_{n_j}) \subset L^p(\Omega)$ estratta da (u_n) tale che

$$\|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\|_p < \frac{1}{2^j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Sia

$$v_m(x) = \sum_{j=1}^m |u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x)|, \quad m = 1, 2, \dots$$

Allora

$$\|v_m\|_p \leq \sum_{j=1}^m \|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\|_p < 1, \quad m = 1, 2, \dots$$

Posto

$$v(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} v_m(x),$$

che può essere infinito per qualche x , si ha per il lemma di Fatou

$$\int_{\Omega} |v(x)|^p d\mathcal{L}^N(x) \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |v_m(x)|^p d\mathcal{L}^N(x) \leq 1.$$

Pertanto $v(x) < +\infty$ per q.o. $x \in \Omega$ e la serie

$$u_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{+\infty} (u_{n_{j+1}}(x) - u_{n_j}(x))$$

converge ad un limite $u(x)$ q.o. in Ω . Poiché la serie precedente è telescopica si ha

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_{n_m}(x) = u(x) \quad \text{q.o. in } \Omega. \quad (4.1)$$

Quindi per il lemma di Fatou

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x) - u_n(x)|^p d\mathcal{L}^N(x) &= \int_{\Omega} \lim_{j \rightarrow +\infty} |u_{n_j}(x) - u_n(x)|^p d\mathcal{L}^N(x) \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |u_{n_j}(x) - u_n(x)|^p d\mathcal{L}^N(x) \\ &\leq \varepsilon^p \quad \forall n \geq \nu_\varepsilon. \end{aligned}$$

Per cui

$$u = (u - u_n) + u_n \in L^p(\Omega) \quad (n \geq \nu_\varepsilon)$$

e

$$\|u - u_n\|_p \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Da cui la completezza di $L^p(\Omega)$. □

Dalla dimostrazione del teorema precedente (vedi (4.1)) si deduce il seguente risultato

Corollario 4.5.2. *Da ogni successione di Cauchy in $L^p(\Omega)$ si può estrarre una successione convergente q.o. in Ω .*

CAPITOLO 5

Convoluzione e Regolarizzazione per convoluzione

Il risultato principale di questo capitolo è il Teorema di densità 5.4.1.

5.1 Convoluzione e Regolarizzazione per convoluzione

Ricordiamo che uno spazio topologico X si dice (spazio) normale se è T_1 (cioè se ogni punto è un chiuso) e

$\forall F_1, F_2$ chiusi, non vuoti, disgiunti $\exists G_1, G_2$ aperti, disgiunti : $F_1 \subset G_1, F_2 \subset G_2$.

Osserviamo che ogni spazio metrico è (uno spazio) normale.

Teorema 5.1.1. (*Lemma di Urysohn*)

Sia X uno spazio normale. Comunque si prendano due chiusi, non vuoti, disgiunti, F_1 e F_2 di X , esiste $u_1 : X \rightarrow [0, 1]$ continua tale che

$$u_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in F_1 \\ 0 & \text{se } x \in F_2. \end{cases}$$

Lemma 5.1.2. $C_0^0(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Dimostrazione. Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e senza ledere la generalità, supponiamo $u \geq 0$. Esiste allora (u_n) successione crescente di funzioni semplici, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq u$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, tale che

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}^N$$

e per il teorema della convergenza dominata

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \text{ in norma } L^1(\mathbb{R}^N).$$

È sufficiente allora provare la tesi per χ_E (funzione caratteristica di E :

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases} \text{ con } E \text{ misurabile e limitato.}$$

Si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \text{ compatto e } G \text{ aperto limitato, } F \subset E \subset G \quad : \quad |G \setminus F| < \varepsilon.$$

Poiché F e $\mathbb{R}^N \setminus G$ sono chiusi, non vuoti, disgiunti di \mathbb{R}^N (spazio normale), dal lemma di Urysohn segue che esiste $u_1 : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, 1]$ continua tale che

$$u_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in F \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus G, \end{cases}$$

anzi $u_1 \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ (giacché $\text{supp } u_1 \subset \overline{G}$). Risulta

$$\begin{aligned} \|\chi_E - u_1\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^N = F \cup (\mathbb{R}^N \setminus G) \cup (G \setminus F)} |\chi_E(x) - u_1(x)| \, d\mathcal{L}^N(x) \\ &= \int_{G \setminus F} |\chi_E(x) - u_1(x)| \, d\mathcal{L}^N(x) \\ &\leq \int_{G \setminus F} d\mathcal{L}^N(x) = |G \setminus F| < \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Definizione 5.1.3. Sia $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile. Poniamo, per $a > 0$,

$$T_a u := (a \wedge u) \vee -a$$

(troncata di u al livello a).

Osservazione 5.1.4. Sia $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < +\infty$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ nulla fuori di un compatto di \mathbb{R}^N tale che $\|v - u\|_p < \varepsilon$.

Dimostrazione. Sia $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < +\infty$. Poniamo

$$u_n := T_n u \cdot \chi_{\overline{B}_n(0)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ed è nulla fuori di $\overline{B}_n(0)$ (compatto). Risulta

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \text{ q.o. in } \mathbb{R}^N$$

e $|u_n|^p \leq |u|^p$. Per il teorema della convergenza dominata si ha

$$\|u_n - u\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

pertanto

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq \nu_\varepsilon \quad \|u_n - u\|_p < \varepsilon.$$

Basta dunque prendere $v = u_{\nu_\varepsilon}$. □

Lemma 5.1.5. $C_0^0(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per ogni $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < +\infty$.

Dimostrazione. Sia $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < +\infty$ (per $p = 1$ vedi il lemma precedente); per l'osservazione precedente, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, nulla fuori di un compatto e tale che $\|u - v\|_p < \varepsilon$. Tale $v \in L^1(\mathbb{R}^N)$, allora per il lemma precedente, fissato (arbitrariamente) $\delta > 0$ esiste $v_1 \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\|v - v_1\|_1 < \delta.$$

Si può assumere che v_1 sia tale che $\|v_1\|_\infty \leq \|v\|_\infty$ (altrimenti, se $\|v_1\|_\infty > \|v\|_\infty$, si prende $T_{\|v\|_\infty} v_1$).

Dalla disuguaglianza di Minkowski si ha:

$$\|u - v_1\|_p \leq \|u - v\|_p + \|v - v_1\|_p < \varepsilon + \|v - v_1\|_p.$$

Inoltre da

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v - v_1|^p d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\mathbb{R}^N} |v - v_1| \cdot |v - v_1|^{p-1} d\mathcal{L}^N(x)$$

si ha

$$\|v - v_1\|_p^p \leq \|v - v_1\|_1 \cdot \|v - v_1\|_\infty^{p-1}$$

e quindi

$$\|v - v_1\|_p \leq \|v - v_1\|_1^{\frac{1}{p}} \cdot \|v - v_1\|_\infty^{1-\frac{1}{p}} < \delta^{\frac{1}{p}} (2\|v\|_\infty)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Scelto $\delta > 0$ sufficientemente piccolo tale che $\delta^{\frac{1}{p}} (2\|v\|_\infty)^{1-\frac{1}{p}} < \varepsilon$, si ha

$$\|v - v_1\|_p < \varepsilon,$$

pertanto

$$\|u - v_1\|_p < 2\varepsilon. \quad \square$$

Osservazione 5.1.6. Il lemma precedente non è vero per $p = +\infty$.

Infatti, se per $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ esistesse $(u_n) \subset C_0^0(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \quad \text{in } L^\infty(\mathbb{R}^N),$$

essendo la convergenza uniforme, u sarebbe necessariamente continua. Ciò dovrebbe valere anche per $u = \chi_E$, con E insieme misurabile, che è discontinua; il che è assurdo. \square

La nozione di supporto per una funzione continua $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è, come già visto, la chiusura dell'insieme $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$, ovvero $\text{supp } u$ è il complementare del più grande aperto in cui $u = 0$.

Tale nozione non è adeguata quando si ha a che fare con classi di equivalenza (come nel caso degli spazi $L^p(\Omega)$): osserviamo, e.g., che l'usuale nozione non ha senso per la funzione di Dirichlet χ_Q definita su \mathbb{R} .

Pertanto diamo la seguente definizione (che coincide con quella nota nel caso delle funzioni continue).

Definizione 5.1.7. Sia $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una qualunque funzione. Definiamo $\text{supp } u$ il complementare del più grande aperto in cui $u = 0$ q.o. in Ω .

Questa definizione è “intrinseca” (se $u_1 = u_2$ q.o. in Ω allora $\text{supp } u_1 = \text{supp } u_2$), e quindi possiamo parlare di $\text{supp } u$ per $u \in L^p(\Omega)$, senza precisare quale rappresentante scegliamo nella classe di equivalenza.

Osserviamo che $\text{supp } \chi_Q = \emptyset$.

Teorema 5.1.8. (*Prodotto di convoluzione*)

Siano $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq +\infty$, allora per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$ la funzione

$$y \mapsto u(x - y) \cdot v(y)$$

è integrabile in \mathbb{R}^N .

Posto

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x - y) \cdot v(y) d\mathcal{L}^N(y)$$

(*prodotto di convoluzione di u per v*)

si ha

$$u * v \in L^p(\mathbb{R}^N)$$

e vale la disuguaglianza di Young

$$\|u * v\|_p \leq \|u\|_1 \cdot \|v\|_p. \quad (5.1)$$

Osservazione 5.1.9. Osserviamo che il prodotto di convoluzione è commutativo; inoltre si ha¹⁵

$$\text{supp } (u * v) \subseteq \overline{(\text{supp } u) + (\text{supp } v)}.$$

Notiamo inoltre che se le funzioni u e v hanno entrambe supporto compatto, allora anche $u * v$ è a supporto compatto.

¹⁵**Definizione.** Se A e B sono due sottoinsiemi di \mathbb{R}^N poniamo

$$A + B := \left\{ z \in \mathbb{R}^N; \exists a \in A, b \in B : z = a + b \right\}.$$

Chiaramente $A + B = B + A$.

- Se A e B sono entrambi chiusi, la somma $A + B$ può non essere un insieme chiuso.
- Se A è un chiuso e B è un compatto, la somma $A + B$ è un insieme chiuso.
- Siccome la somma di due insiemi limitati è limitata, dal risultato di chiusura segue che la somma di due compatti è ancora un compatto.
- Se A è un chiuso e $r > 0$ vale la formula

$$A + \overline{B}_r(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N; d(x, A) \leq r \right\}.$$

Siano

$$A = \bigcup_{n \geq 2} \left[-n, -n + \frac{1}{n^2} \right]$$

$$B = \bigcup_{n \geq 2} \left[n + \frac{1}{n^2}, n + \frac{2}{n^2} \right];$$

allora

$$\chi_A, \chi_B \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad 0 \notin \text{supp } \chi_A + \text{supp } \chi_B = A + B$$

Teorema 5.1.10. Se $u \in C_0^k(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ allora

$$u * v \in C^k(\mathbb{R}^N) \quad \wedge \quad D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

In particolare se $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ allora

$$u * v \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \wedge \quad D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

A complemento del teorema di regolarità del prodotto di convoluzione (teorema 5.1.10) richiamiamo i seguenti risultati.

Teorema 5.1.11.

(i) Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ($1 \leq p \leq +\infty$) e $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ ¹⁷, allora

$$f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \quad e \quad D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N;$$

(ii) se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, allora $f * g \in C^0(\mathbb{R}^N)$.

(infatti $\forall a \in A \quad \exists n \geq 2 : a \in \left[-n, -n + \frac{1}{n^2}\right]$; se $b = -a$, allora $b \in \left[n - \frac{1}{n^2}, n\right]$ e quindi b non può appartenere a B). Posto $a_n = \frac{3}{2n^2}$ si ha

$$(\chi_A * \chi_B)(a_n) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(a_n - y) \cdot \chi_B(y) d\mathcal{L}^1(y) = |\tau_{a_n}(-A) \cap B| \geq \frac{1}{2n^2} > 0$$

dove $\tau_{a_n}(-A) = a_n - A$, perché

$$\tau_{a_n}(-A) \cap B \supseteq \underbrace{\left[a_n + n - \frac{1}{n^2}, a_n + n\right] \cap \left[n + \frac{1}{n^2}, n + \frac{2}{n^2}\right]}_{\text{la cui misura è } = \frac{1}{2n^2}}.$$

Dunque $(\chi_A * \chi_B)(a_n) > 0$ (si può provare che $\chi_A * \chi_B \in C^0(\mathbb{R})$) e quindi $0 \in \text{supp}(\chi_A * \chi_B)$. Pertanto, in generale, non è vero che

$$\text{supp}(u * v) \subseteq (\text{supp } u) + (\text{supp } v).$$

cfr. anche e.g. [8], pp. 323-326.

¹⁶ $v \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N) \iff \forall K$ compatto di $\mathbb{R}^N : v \in L^1(K)$.

¹⁷ per la classe di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si veda il paragrafo 10.2

Illustreremo ora una *tecnica di regolarizzazione per convoluzione* introdotta da Leray e Friedrichs.

5.2 Successioni regolarizzanti

Definizione 5.2.1. Una successione di mollificatori (o successione regolarizzante) (ϱ_n) è una qualunque successione di funzioni su \mathbb{R}^N tali che

$$\varrho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \text{supp } \varrho_n = \overline{B}_{\frac{1}{n}}(0),$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varrho_n(x) d\mathcal{L}^N(x) = 1, \quad \varrho_n \geq 0 \quad \text{su } \mathbb{R}^N.$$

Nel seguito utilizzeremo sistematicamente la notazione (ϱ_n) per indicare una successione di mollificatori costruita a partire dalla funzione $\varrho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ (introdotta in precedenza nel paragrafo 1.1), ponendo

$$\varrho_n(x) = \frac{n^N \varrho(nx)}{\int_{\mathbb{R}^N} \varrho(x) d\mathcal{L}^N(x)}.$$

5.3 Approssimazione dell'identità

Teorema 5.3.1. (*Teorema di approssimazione dell'identità*)
Sia (ϱ_n) una successione di mollificatori.

(i) se $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e u è uniformemente continua su K compatto di \mathbb{R}^N , allora

$$\varrho_n * u \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \quad \text{sul compatto } K;$$

(ii) se $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < +\infty$, allora

$$\varrho_n * u \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \quad \text{in norma } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Inoltre

$$\|\varrho_n * u\|_p \leq \|u\|_p \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione. (i) La funzione $u|_K$ è uniformemente continua, quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_{K, \varepsilon} > 0 \quad : \quad |u(x-y) - u(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in K \quad \forall y \in \overline{B}_\delta(0).$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ risulta

$$\begin{aligned} (\varrho_n * u)(x) - u(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y) \varrho_n(y) d\mathcal{L}^N(y) - u(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x-y) \varrho_n(y) d\mathcal{L}^N(y) - \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \varrho_n(y) d\mathcal{L}^N(y) \\ &= \int_{\overline{B}_{\frac{1}{n}}(0)} [u(x-y) - u(x)] \varrho_n(y) d\mathcal{L}^N(y). \end{aligned}$$

Pertanto per ogni $x \in K$ e per ogni $n > \frac{1}{\delta}$ si ha

$$\begin{aligned} |(\varrho_n * u)(x) - u(x)| &\leq \int_{\overline{B}_{\frac{1}{n}}(0)} |u(x-y) - u(x)| \varrho_n(y) d\mathcal{L}^N(y) \\ &\leq \int_{\overline{B}_\delta(0)} |u(x-y) - u(x)| \varrho_n(y) d\mathcal{L}^N(y) \\ &< \varepsilon \cdot \int_{\overline{B}_\delta(0)} \varrho_n(y) d\mathcal{L}^N(y) = \varepsilon. \end{aligned}$$

- (ii) Sia $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq +\infty$; per quanto già provato in un lemma precedente $(\overline{C_0^0(\mathbb{R}^N)} = L^p(\mathbb{R}^N), 1 \leq p \leq +\infty)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $u_1 \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\|u - u_1\|_p < \varepsilon.$$

Per il punto (i) $\varrho_n * u_1 \rightrightarrows u_1$ su ogni compatto contenuto nel $\text{supp } u_1$, e quindi, osservato che

$$\text{supp } (\varrho_n * u_1) \subseteq \overline{\text{supp } \varrho_n + \text{supp } u_1} = \overline{B_{\frac{1}{n}}(0)} + \text{supp } u_1 \subset \overline{B_1(0)} + \text{supp } u_1$$

(che è un determinato compatto) passando al limite sotto il segno di integrale risulta

$$\|(\varrho_n * u_1) - u_1\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Poiché

$$(\varrho_n * u) - u = [\varrho_n * (u - u_1)] + [\varrho_n * u_1 - u_1] + [u_1 - u]$$

si ha

$$\begin{aligned} \|(\varrho_n * u) - u\|_p &\leq \|\varrho_n * (u - u_1)\|_p + \|(\varrho_n * u_1) - u_1\|_p + \|u_1 - u\|_p \\ &\leq \|\varrho_n\|_1 \cdot \|u - u_1\|_p + \|(\varrho_n * u_1) - u_1\|_p + \|u_1 - u\|_p \\ &= 2\|u - u_1\|_p + \|(\varrho_n * u_1) - u_1\|_p. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|(\varrho_n * u) - u\|_p \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

da cui la tesi. □

Al teorema precedente si può dare anche la seguente versione (più generale) (cfr. e.g. [7], Th.(0.13)) :

Teorema 5.3.2. Sia $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) = a$. Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} \cdot \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

- (i) Se $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e u è uniformemente continua su K compatto di \mathbb{R}^N , allora

$$\varphi_\varepsilon * u \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} au \quad \text{sul compatto } K.$$

- (ii) Se $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq +\infty$, allora

$$\varphi_\varepsilon * u \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} au \quad \text{in norma } L^p(\mathbb{R}^N).$$

5.4 Densità di $C_0^\infty(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq +\infty$)

Teorema 5.4.1. (Teorema di densità)

Sia Ω aperto connesso di \mathbb{R}^N . Lo spazio $C_0^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq +\infty$.

Osserviamo che il teorema di densità può esprimersi con una delle seguenti formulazioni:

$$\forall u \in L^p(\Omega) \quad 1 \leq p \leq +\infty, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists u_1 \in C_0^\infty(\Omega) \quad : \quad \|u - u_1\|_p < \varepsilon$$

oppure

$$\forall u \in L^p(\Omega) \quad 1 \leq p \leq +\infty, \quad \exists (u_n) \subset C_0^\infty(\Omega) \quad : \quad \|u_n - u\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Dimostrazione. Data $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, sia

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Risulta $\bar{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Essendo Ω aperto, esiste una successione crescente di compatti K_n tale che

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$v_n = \bar{u} \cdot \chi_{K_n}.$$

Si ha

$$v_n \in L^p(\mathbb{R}^N), \quad \text{supp } v_n = K_n, \quad |v_n|^p \leq |\bar{u}|^p,$$

e

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{u} \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}^N;$$

allora, per il teorema della convergenza dominata,

$$\|v_n - \bar{u}\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Posto, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \varrho_n * v_n$$

si ha $u_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$; d'altra parte

$$\text{supp } (\varrho_n * v_n) \subseteq \overline{\text{supp } \varrho_n + \text{supp } v_n} = \overline{B_{\frac{1}{n}}(0) + K_n} = \left\{ x \in \mathbb{R}^N; \quad d(x, K_n) \leq \frac{1}{n} \right\} \subset \Omega$$

per n sufficientemente grande.

Pertanto, per n sufficientemente grande

$$u_n \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ora

$$\begin{aligned}
 \|u_n - u\|_p &= \|u_n - \bar{u}\|_p = \|(\varrho_n * v_n) - \bar{u}\|_p \\
 &= \|(\varrho_n * v_n) - (\varrho_n * \bar{u}) + (\varrho_n * \bar{u}) - \bar{u}\|_p \\
 &\leq \|(\varrho_n * v_n) - (\varrho_n * \bar{u})\|_p + \|(\varrho_n * \bar{u}) - \bar{u}\|_p \\
 &= \|\varrho_n * (v_n - \bar{u})\|_p + \|(\varrho_n * \bar{u}) - \bar{u}\|_p \\
 &\leq \|\varrho_n\|_1 \cdot \|v_n - \bar{u}\|_p + \|(\varrho_n * \bar{u}) - \bar{u}\|_p
 \end{aligned}$$

(si è applicata la disuguaglianza di Young).

Pertanto, poiché

$$\|v_n - \bar{u}\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

e (per (ii) del teorema di approssimazione dell'identità)

$$\|(\varrho_n * \bar{u}) - \bar{u}\|_p$$

segue che

$$\|u_n - u\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Si è quindi provato che data $u \in L^p(\Omega)$ esiste $(u_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tale che

$$\|u_n - u\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

□

Osservazione 5.4.2. Sia Ω aperto connesso di \mathbb{R}^N e sia $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ tale che

$$\int_{\Omega} u(x) \cdot \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Allora

$$\int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) d\mathcal{L}^N(x) = 0$$

per ogni $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ a supporto compatto contenuto in Ω .

Dimostrazione. Sia $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ a supporto compatto K contenuto in Ω (quindi $v \in L^1(\mathbb{R}^N)$). Consideriamo

$$v_n = \varrho_n * v \in C^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Poiché

$$\text{supp } v_n \subset \bar{B}_{\frac{1}{n}}(0) + K \subset \Omega$$

per n sufficientemente grande, risulta per gli stessi n

$$v_n \in C_0^\infty(\Omega);$$

inoltre, poiché per il punto (ii) del teorema di approssimazione dell'identità

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^N),$$

esiste un'estratta di (v_n) , (v_{k_n}) , tale che

$$v_{k_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v \quad \text{q.o. in } \mathbb{R}^N.$$

Inoltre dalla disuguaglianza di Young risulta

$$\|v_n\|_\infty \leq \|v\|_\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dall'ipotesi si ha, per n sufficientemente grande

$$\int_{\Omega} u(x) \cdot v_{k_n}(x) d\mathcal{L}^N(x) = 0,$$

e passando al limite sotto il segno di integrale (per il teorema della convergenza dominata) si ha

$$\int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) d\mathcal{L}^N(x) = 0. \quad \square$$

Corollario 5.4.3. Se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} u(x) \cdot \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

allora

$$u = 0 \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

Dimostrazione. Osservato che Ω è unione numerabile di compatti, la tesi si riduce a provare che fissato un arbitrario compatto $K \subset \Omega$ si ha $u = 0$ q.o. in K . Definiamo

$$v(x) = \begin{cases} \text{segno } u(x) & \text{se } x \in K \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus K \end{cases}$$

dove

$$\text{segno } u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } u(x) > 0 \\ 0 & \text{se } u(x) = 0 \\ -1 & \text{se } u(x) < 0. \end{cases}$$

Si ha che $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ed ha supporto compatto $K \subset \Omega$. Per l'ipotesi e l'osservazione precedente si ha

$$0 = \int_K u(x) \cdot v(x) d\mathcal{L}^N(x) = \int_K |u(x)| d\mathcal{L}^N(x)$$

e quindi $u = 0$ q.o. in K . □

In particolare vale il seguente risultato (di du Bois-Reymond):

Corollario 5.4.4. Se $u \in L^1([a, b])$ e

$$\int_a^b u(x) \varphi^*(x) d\mathcal{L}^1(x) = 0 \quad \forall \varphi^* \in C_0^\infty([a, b])$$

tale che

$$\int_a^b \varphi^*(x) d\mathcal{L}^1(x) = 0 \quad (\text{i.e. } \varphi^* \text{ ha media nulla}),$$

allora

$$u = \text{costante} \quad \text{q.o. in } [a, b].$$

Dimostrazione. Sia $\varphi_1 \in C_0^\infty([a, b])$ con $\int_a^b \varphi_1(x) d\mathcal{L}^1(x) = 1$.

Allora se φ è una qualunque funzione di classe $C_0^\infty([a, b])$, la funzione

$$\varphi^*(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x) \int_a^b \varphi(y) d\mathcal{L}^1(y) \in C_0^\infty([a, b])$$

$$\text{e } \int_a^b \varphi^*(x) d\mathcal{L}^1(x) = 0.$$

Si riconosce facilmente che per l'ipotesi risulta

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b u(x) \varphi^*(x) d\mathcal{L}^1(x) \\ &= \int_a^b u(x) \varphi(x) d\mathcal{L}^1(x) - \int_a^b u(x) \varphi_1(x) d\mathcal{L}^1(x) \cdot \int_a^b \varphi(y) d\mathcal{L}^1(y) \\ &= \int_a^b u(x) \varphi(x) d\mathcal{L}^1(x) - \int_a^b u(y) \varphi_1(y) d\mathcal{L}^1(y) \cdot \int_a^b \varphi(x) d\mathcal{L}^1(x) \\ &= \int_a^b \left[u(x) - \underbrace{\int_a^b u(y) \varphi_1(y) d\mathcal{L}^1(y)}_{=\text{cost}} \right] \varphi(x) d\mathcal{L}^1(x), \end{aligned}$$

con φ arbitraria funzione di classe $C_0^\infty([a, b])$.

Per il corollario precedente segue la tesi. \square

5.5 Prodotto di convoluzione di due distribuzioni

Estendiamo¹⁸ alle distribuzioni il concetto di prodotto di convoluzione, introdotto nel Teorema 5.1.8. Premettiamo la definizione di supporto di una distribuzione che estende quella nota per funzioni (cfr. Definizione 5.1.7).

¹⁸Cfr. e.g. [14].

Definizione 5.5.1. (*Supporto di una distribuzione*)

Si dice che una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è uguale a 0 in un aperto $\Omega' \subset \Omega$ se risulta $\langle T, \varphi \rangle = 0$ per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$.

Il supporto di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è il complementare (relativo a Ω) del più grande aperto (contenuto in Ω) in cui T è uguale a 0.

Esempio. Il supporto di δ è $\{0\}$.

Osservazione 5.5.2. Una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ a supporto compatto si può estendere dallo spazio delle funzioni *test* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ a tutto $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ ponendo, per ogni $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\langle T, \psi \rangle := \langle T, \phi \psi \rangle$$

con $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tale che $\phi \equiv 1$ su un aperto contenente $\text{supp } T$ (osserviamo che $\phi \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$).

L'estensione così definita non dipende dalla particolare funzione ϕ scelta.

Definizione 5.5.3. (*Prodotto di convoluzione di una distribuzione per una funzione*)

Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Si definisce prodotto di convoluzione $T * f$ la funzione

$$(T * f)(x) := \langle T(y), f(x - y) \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad (5.2)$$

dove la notazione ha il significato che la distribuzione $T(y)$ agisce sulla variabile y producendo una funzione della variabile x .

Osservazione 5.5.4. Se $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ e $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ allora, denotata con T_u la distribuzione associata alla funzione u , risulta

$$T_u * f = u * f. \quad (5.3)$$

Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, si ha

$$(T_u * f)(x) = \langle T_u(y), f(x - y) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} u(y) f(x - y) d\mathcal{L}^N(y) = (u * f)(x).$$

Osservazione 5.5.5. Risulta

$$\delta * f = f \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (5.4)$$

Da (5.2) si ha

$$(\delta * f)(x) = \langle \delta(y), f(x - y) \rangle = f(x - 0) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Osservazione 5.5.6. Se la distribuzione T è a supporto compatto allora per l'Osservazione 5.5.2 si può estendere il prodotto di convoluzione $T * f$ definito dalla (5.2) a $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 5.5.7.

(i) Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ allora $T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$D^\alpha(T * f) = (D^\alpha T) * f = T * (D^\alpha f) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N; \quad (5.5)$$

(ii) se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ è una distribuzione a supporto compatto e $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ allora $T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e vale la proprietà (5.5);

(iii) se, inoltre, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ è una distribuzione a supporto compatto e $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ allora $T * f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Definizione 5.5.8. (Prodotto di convoluzione di due distribuzioni)

Siano $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ di cui almeno una a supporto compatto. Si definisce prodotto di convoluzione $T * S$ la distribuzione tale che

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T(x), \langle S(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \quad (5.6)$$

dove la notazione ha il significato che la distribuzione $S(y)$ agisce sulla variabile y producendo una funzione della variabile x a cui si applica la distribuzione $T(x)$.

Osserviamo che la definizione è ben posta in quanto

- (a) se la distribuzione S è a supporto compatto allora, per la (iii) del Teorema 5.5.7, la funzione $x \mapsto (S * \varphi)(x)$ è di classe $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, cioè è una funzione *test*;
- (b) se la distribuzione T è a supporto compatto, poiché per la (i) del Teorema 5.5.7 la funzione $T * f$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^N)$, si considera l'estensione di T allo spazio $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (Osservazione 5.5.2 e Osservazione 5.5.6).

Osservazione 5.5.9. In particolare, se $u, v \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ e almeno una di esse è a supporto compatto risulta

$$\langle T_u * T_v, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} u(x) v(y) \varphi(x+y) d\mathcal{L}^N(x) d\mathcal{L}^N(y) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Osservazione 5.5.10. Siano $u, v \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$, con u a supporto compatto e v limitata. Vale la seguente proprietà¹⁹

$$T_{u*v} = T_u * T_v.$$

¹⁹Si osservi che $u * v \in C^0(\mathbb{R}^N)$ per la (ii) del Teorema 5.1.11 e quindi $u * v \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$; inoltre la distribuzione T_u è a supporto compatto e quindi ha senso considerare il prodotto di convoluzione $T_u * T_v$.

Infatti per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ risulta

$$\begin{aligned}
 \langle T_{u*v}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} (u * v)(z) \varphi(z) d\mathcal{L}^N(z) = \int_{\mathbb{R}^N} (v * u)(z) \varphi(z) d\mathcal{L}^N(z) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} v(z-x) u(x) d\mathcal{L}^N(x) \right) \varphi(z) d\mathcal{L}^N(z) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \left(\int_{\mathbb{R}^N} v(z-x) \varphi(z) d\mathcal{L}^N(z) \right) d\mathcal{L}^N(x) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \left(\int_{\mathbb{R}^N} v(y) \varphi(x+y) d\mathcal{L}^N(y) \right) d\mathcal{L}^N(x) \\
 &= \langle T_u * T_v, \varphi \rangle
 \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è applicata l'Osservazione 5.5.9.

Osservazione 5.5.11. Dall'Osservazione 5.5.10 segue che la Definizione 5.5.8 estende in maniera naturale alle distribuzioni il prodotto di convoluzione tra funzioni (introdotto nel Teorema 5.1.8).

Inoltre il prodotto di convoluzione tra distribuzioni (definito nella Definizione 5.5.8) è anche una estensione della (5.2), in quanto, se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $f \in C^\infty_0(\mathbb{R}^N)$, la distribuzione associata alla funzione $T_u * f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ definita dalla (5.2) risulta uguale alla distribuzione $T_u * T_f$ definita dalla (5.6).

Si ha, infatti, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^N} (T_u * f)(x) \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} (T_u * f)(z) \varphi(z) d\mathcal{L}^N(z) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(z) d\mathcal{L}^N(z) \int_{\mathbb{R}^N} u(x) f(z-x) d\mathcal{L}^N(x) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x) d\mathcal{L}^N(x) \int_{\mathbb{R}^N} f(z-x) \varphi(z) d\mathcal{L}^N(z) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x) d\mathcal{L}^N(x) \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \varphi(x+y) d\mathcal{L}^N(y) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \langle T_f(y), \varphi(x+y) \rangle d\mathcal{L}^N(x) \\
 &= \langle T_u(x), \langle T_f(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle.
 \end{aligned}$$

Osservazione 5.5.12. Si può provare che il prodotto di convoluzione tra due distribuzioni, di cui almeno una a supporto compatto, è commutativo.

Inoltre, il prodotto di convoluzione di due distribuzioni aventi entrambe supporto compatto è una distribuzione a supporto compatto.

Osservazione 5.5.13. Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Osservato che δ è una distribuzione a supporto compatto (essendo $\text{supp } \delta = \{0\}$) sono ben definiti i prodotti di convoluzione $T * \delta$ e $\delta * T$. Vale la seguente proprietà

$$T * \delta = \delta * T = T \quad (5.7)$$

e quindi la distribuzione δ rappresenta l'unità rispetto al prodotto di convoluzione.

Proviamo la (5.7). Risulta per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

$$\langle T * \delta, \varphi \rangle = \langle T(x), \langle \delta(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle T(x), \varphi(x+0) \rangle = \langle T(x), \varphi(x) \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

da cui segue che $T * \delta = T$.

Osservazione 5.5.14. Sussiste il seguente risultato: se $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e almeno una di esse è a supporto compatto si ha

$$D^\alpha(T * S) = (D^\alpha T) * S = T * (D^\alpha S) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

CAPITOLO 6

Spazi di Hilbert (reali)

6.1 Spazi di Hilbert (reali)

Sia H uno spazio vettoriale reale.

Un prodotto scalare su H è un funzionale reale $(\cdot | \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ bilineare simmetrico e definito positivo (i.e. $(u|u) \geq 0 \quad \forall u \in H$ e $(u|u) > 0 \quad \forall u \in H \setminus \{0\}$).

Un prodotto scalare verifica la

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$|(u|v)| \leq (u|u)^{\frac{1}{2}} (v|v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in H.$$

A partire dal prodotto scalare su H possiamo definire la seguente norma (come si verifica facilmente tenuto conto, per la proprietà triangolare, della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz),

$$|u|_H := (u|u)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H$$

detta norma di Hilbert (in quanto associata a un prodotto scalare).

Osservazione. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz implica che, fissato $v \in H$, il funzionale $u \in H \rightarrow (u|v) \in \mathbb{R}$ è lipschitziano di costante $|v|_H$.

Ricordiamo anche la

Identità del parallelogramma:

$$\left| \frac{u+v}{2} \right|_H^2 + \left| \frac{u-v}{2} \right|_H^2 = \frac{1}{2} (|u|_H^2 + |v|_H^2) \quad \forall u, v \in H.$$

H si dice **spazio di Hilbert (reale)** se è uno spazio vettoriale reale munito di un prodotto scalare, completo rispetto alla norma di Hilbert $|\cdot|_H$.

Esempi.

- Per $L^2(\Omega)$ munito del prodotto scalare

$$(u|v)_2 := \int_{\Omega} u(x)v(x) d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

si ha

$$\|u\|_2 = (u|u)_2^{\frac{1}{2}}.$$

$(L^2(\Omega), \|\cdot\|_2)$ è uno spazio di Hilbert.

- Per $W^{1,2}(\Omega)$ (cfr. Capitolo 7) munito del prodotto scalare

$$\begin{aligned} (u|v)_{1,2} &:= (u|v)_2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \middle| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_2 \\ &= \int_{\Omega} u(x)v(x) d\mathcal{L}^N(x) + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall u, v \in W^{1,2}(\Omega) \end{aligned}$$

si ha

$$\|u\|_{1,2} = \left(\|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (u|u)_{1,2}^{\frac{1}{2}}.$$

$(W^{1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{1,2})$ è uno spazio di Hilbert.

- Ovviamente anche $W_0^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert, e se Ω è limitato, in $W_0^{1,2}(\Omega)$ si può assumere come prodotto scalare (tenuto conto della disuguaglianza di Poincaré, Teorema 7.4.1 e Corollario 7.4.2)

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \middle| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_2 = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall u, v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

6.2 Proiezione su un convesso chiuso

Teorema 6.2.1. (Teorema della proiezione (su un convesso, chiuso, non vuoto di uno spazio di Hilbert))

Sia $(H, |\cdot|_H)$ uno spazio di Hilbert; sia $K \subset H$ convesso, chiuso e non vuoto. Allora

$$\forall f \in H \quad \exists |u = u_f \in K :$$

$$|f - u|_H = \min_{v \in K} |f - v|_H \quad (= d(f, K)) . \quad (1)$$

Inoltre u è caratterizzato dalla seguente proprietà:

$$\begin{cases} u \in K \\ (f - u|v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K . \end{cases} \quad (2)$$

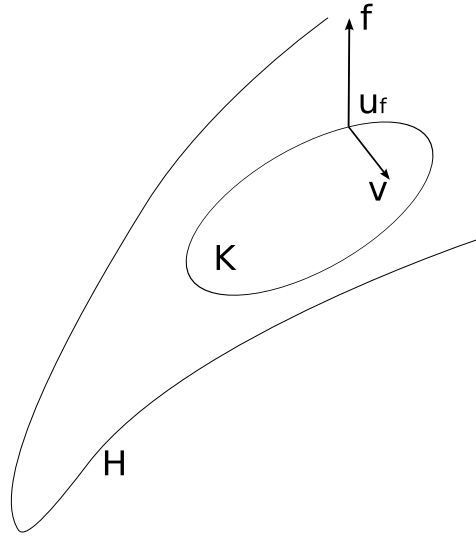


Figura 6.1: Proiezione su un convesso chiuso

Dimostrazione. Esistenza.

Sia

$$d := \inf_{v \in K} |f - v|_H.$$

Per le proprietà dell'estremo inferiore esiste $(v_n) \subset K$ tale che

$$d_n := |f - v_n|_H \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d$$

(i.e. $\exists (v_n) \subset K$ successione “minimizzante” per $|f - \cdot|_H$).

Posto $u = f - v_n$ e $v = f - v_m$ nell'identità del parallelogramma, si ha

$$\left| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right|_H^2 + \left| \frac{v_m - v_n}{2} \right|_H^2 = \frac{1}{2} (|f - v_n|_H^2 + |f - v_m|_H^2)$$

e quindi

$$\left| \frac{v_m - v_n}{2} \right|_H^2 = \frac{1}{2} (|f - v_n|_H^2 + |f - v_m|_H^2) - \left| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right|_H^2.$$

Poiché $v_n, v_m \in K$ e K è convesso, risulta $\frac{v_n + v_m}{2} \in K$ e quindi

$$\left| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right|_H \geq d.$$

Pertanto

$$0 \leq \left| \frac{v_m - v_n}{2} \right|_H^2 \leq \frac{1}{2} (d_n^2 + d_m^2) - d^2$$

e quindi

$$\exists \lim_{n, m \rightarrow +\infty} |v_n - v_m|_H = 0.$$

Dunque la successione $(v_n) \subset K$ è di Cauchy in H .

Poiché H è completo e K è chiuso, esiste $u = u_f \in K$ tale che $|v_n - u|_H \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Osservato che

$$d \leq |f - u|_H \leq |f - v_n|_H + |v_n - u|_H,$$

passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ risulta

$$|f - u|_H = d.$$

Si è dunque provata l'esistenza.

Proviamo adesso l'equivalenza: $(2) \iff (1)$.

$(2) \implies (1)$ Sia $v \in K$. Per il teorema di Carnot "generalizzato" si ha

$$|f - u|_H^2 + |v - u|_H^2 - 2(f - u|v - u) = |f - v|_H^2$$

e quindi, ricordando che per ipotesi $(f - u|v - u) \leq 0$,

$$|f - u|_H^2 - |f - v|_H^2 = 2(f - u|v - u) - |v - u|_H^2 \leq 0$$

da cui

$$|f - u|_H \leq |f - v|_H \quad \forall v \in K.$$

$(1) \implies (2)$ Sia $v \in K$. Posto

$$w = (1 - t)u + tv = u + t(v - u) \quad t \in]0, 1],$$

si ha $w \in K$ e per ipotesi

$$|f - u|_H \leq |f - w|_H = |(f - u) - t(v - u)|_H,$$

da cui

$$|f - u|_H^2 \leq |f - u|_H^2 + t^2|v - u|_H^2 - 2t(f - u|v - u)$$

e quindi

$$2(f - u|v - u) \leq t|v - u|_H^2.$$

Passando al limite per $t \rightarrow 0^+$ risulta

$$(f - u|v - u) \leq 0.$$

Resta da provare l'unicità.

Siano $u_1, u_2 \in K$ tali che

$$\begin{cases} (f - u_1|v - u_1) \leq 0 \\ (f - u_2|v - u_2) \leq 0 \end{cases} \quad \forall v \in K.$$

In particolare

$$\begin{cases} (f - u_1|u_2 - u_1) \leq 0 \\ (f - u_2|u_1 - u_2) \leq 0 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} (f - u_1 | u_2 - u_1) \leq 0 \\ (u_2 - f | u_2 - u_1) \leq 0 \end{cases},$$

e quindi

$$0 \leq (u_2 - u_1 | u_2 - u_1) \leq 0,$$

cioè

$$u_1 = u_2. \quad \square$$

Definizione 6.2.2. Nelle ipotesi del teorema precedente definiamo l'operatore "proiezione su K "

$$\begin{aligned} P_K : H &\rightarrow K \\ f &\mapsto P_K(f) = u \quad (\text{proiezione di } f \text{ su } K) \end{aligned}$$

dove u è l'unico elemento di K tale che

$$|f - u|_H = \min_{v \in K} |f - v|_H.$$

Corollario 6.2.3. Sia $(H, |\cdot|_H)$ uno spazio di Hilbert, M un suo sottospazio vettoriale chiuso e sia $f \in H$; allora $u = P_M(f)$ è caratterizzato da

$$\begin{cases} u \in M \\ (f - u | v) = 0 \quad \forall v \in M \quad (\text{i.e. } (f - u) \perp M, \text{ ovvero } f - u \text{ è ortogonale a } M). \end{cases} \quad (3)$$

Dimostrazione. Proviamo l'equivalenza: (3) \iff (2).

(3) \implies (2) Poiché $u \in M$ risulta

$$(f - u | v - u) = 0 \quad \forall v \in M.$$

(2) \implies (3) Dall'ipotesi segue che

$$(f - u | \lambda v - u) \leq 0 \quad \forall v \in M, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

pertanto

$$\lambda(f - u | v) \leq (f - u | u) \quad \forall v \in M, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

e quindi

$$(f - u | v) = 0 \quad \forall v \in M. \quad \square$$

\square

6.3 Duale di uno spazio di Hilbert. Teorema di rappresentazione di Riesz-Fréchet

Indichiamo con H' il duale (topologico) di H (i.e. lo spazio dei funzionali lineari e continui su H). Sussiste il seguente fondamentale teorema che asserisce l'esistenza di un isomorfismo isometrico tra H e H' .

Teorema 6.3.1. (Teorema di rappresentazione (di Riesz-Fréchet))

Sia $(H, |\cdot|_H)$ uno spazio di Hilbert; allora

$$\forall \phi \in H' \quad \exists | u_\phi \in H : \quad \phi(v) = (u_\phi | v) \quad \forall v \in H,$$

inoltre si ha

$$|u_\phi|_H = \|\phi\|_{H'} \quad \left(:= \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|\phi(v)|}{|v|_H} \right).$$

Dimostrazione. Sia $\phi \in H'$. Poniamo

$$M := \phi^{-1}(\{0\}).$$

M è un sottospazio chiuso di H (sottospazio perché nucleo di ϕ lineare, e chiuso perché immagine inversa, tramite ϕ continuo, del chiuso $\{0\}$).

Se $M = H$, risulta $\phi \equiv 0$ e quindi basta prendere $u_\phi = 0_H$ per conseguire la tesi.

Supponiamo dunque $M \subsetneq H$ e sia $g_0 \in H \setminus M$. Per il corollario precedente esiste $g_1 = P_M(g_0) \in M$ tale che

$$(g_0 - g_1 | w) = 0 \quad \forall w \in M.$$

Proviamo che

$$(i) \quad \exists g \notin M : \quad |g|_H = 1, \quad (g | w) = 0 \quad \forall w \in M.$$

Sia

$$g = \frac{g_0 - g_1}{|g_0 - g_1|_H}.$$

Si ha $|g|_H = 1$, $g \notin M$ (se $g \in M$ allora $g_0 = g|g_0 - g_1|_H + g_1 \in M$, che è assurdo) ed inoltre

$$(g | w) = \left(\frac{g_0 - g_1}{|g_0 - g_1|_H} \middle| w \right) = \frac{1}{|g_0 - g_1|_H} (g_0 - g_1 | w) = 0 \quad \forall w \in M.$$

Sia $v \in H$ e proviamo che

(ii) v può essere decomposto nel seguente modo:

$$v = \lambda g + w \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}, w \in M \quad (\text{quindi } H = M^\perp \oplus M).$$

Basta porre

$$\lambda := \frac{\phi(v)}{\phi(g)}, \quad w := v - \frac{\phi(v)}{\phi(g)}g$$

(osserviamo che $w \in M$ perché $\phi(w) = \phi(v) - \frac{\phi(v)}{\phi(g)}\phi(g) = 0$).

Ora

$$(g|v) = \left(g \left| \frac{\phi(v)}{\phi(g)}g + w \right.\right) = \left(g \left| \frac{\phi(v)}{\phi(g)}g \right.\right) + (g|w) = \frac{\phi(v)}{\phi(g)}(g|g) = \frac{\phi(v)}{\phi(g)}|g|_H^2 = \frac{\phi(v)}{\phi(g)},$$

per cui, posto $u_\phi = \phi(g)g$, si ha

$$\phi(v) = (\phi(g)g|v) = (u_\phi|v) \quad \forall v \in H.$$

Si è dunque provata l'esistenza.

Per provare l'unicità, siano $u_1, u_2 \in H$ tali che

$$\begin{aligned} \phi(v) &= (u_1|v) & \forall v \in H \\ \phi(v) &= (u_2|v) & \forall v \in H. \end{aligned}$$

Allora

$$(u_1|v) - (u_2|v) = 0 \quad \forall v \in H,$$

pertanto

$$(u_1 - u_2|v) = 0 \quad \forall v \in H$$

e in particolare

$$(u_1 - u_2|u_1 - u_2) = 0,$$

da cui

$$u_1 = u_2.$$

Resta da provare che

$$|u_\phi|_H = \|\phi\|_{H'}$$

dove

$$\|\phi\|_{H'} = \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|\phi(v)|}{|v|_H}.$$

Poiché

$$\phi(v) = (u_\phi|v) \quad \forall v \in H,$$

dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|\phi(v)| = |(u_\phi|v)| \leq |u_\phi|_H \cdot |v|_H \quad \forall v \in H.$$

Pertanto

$$\frac{|\phi(v)|}{|v|_H} \leq |u_\phi|_H \quad \forall v \in H, \quad v \neq 0$$

da cui segue che

$$\|\phi\|_{H'} = \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|\phi(v)|}{|v|_H} \leq |u_\phi|_H.$$

Osservato, inoltre, che preso $v = u_\phi$, si ha $\phi(u_\phi) = (u_\phi|u_\phi)$ e quindi

$$|\phi(u_\phi)| = |u_\phi|_H^2$$

ovvero, osservato che $|u_\phi|_H \neq 0$,

$$\frac{|\phi(u_\phi)|}{|u_\phi|_H} = |u_\phi|_H,$$

ne segue evidentemente la tesi. \square

6.4 Teoremi di Stampacchia e di Lax-Milgram

Definizione 6.4.1. Sia $(H, |\cdot|_H)$ uno spazio di Hilbert reale.

Un funzionale bilineare

$$a(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

si dice

(i) **continuo** se esiste $\alpha > 0$ tale che

$$|a(u, v)| \leq \alpha |u|_H \cdot |v|_H \quad \forall u, v \in H,$$

(ii) **coercitivo** se esiste $\beta > 0$ tale che

$$a(u, u) \geq \beta |u|_H^2 \quad \forall u \in H.$$

Teorema 6.4.2. (Teorema di Stampacchia)

Sia $(H, |\cdot|_H)$ uno spazio di Hilbert reale; $a(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ un funzionale bilineare, continuo e coercitivo. Sia \mathbb{K} un convesso chiuso non vuoto di H .

Allora

$$\forall \phi \in H' \exists | u_\phi \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \phi(v - u_\phi) - a(u_\phi, v - u_\phi) \leq 0 \quad \forall v \in \mathbb{K}.$$

Inoltre, se $a(u, v)$ è simmetrico, allora u_ϕ è caratterizzato dalla proprietà

$$\begin{cases} u_\phi \in \mathbb{K} \\ u_\phi \text{ minimizza } \frac{1}{2}a(v, v) - \phi(v) \quad \forall v \in \mathbb{K} \end{cases}$$

$$\left(\text{cioè } \frac{1}{2}a(u_\phi, u_\phi) - \phi(u_\phi) = \min_{v \in \mathbb{K}} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \phi(v) \right\} \right).$$

Procedendo come nella dimostrazione del Corollario 6.2.3, dal Teorema 6.4.2 segue il seguente risultato.

Corollario 6.4.3. (Teorema di Lax-Milgram)

Sia $(H, |\cdot|_H)$ uno spazio di Hilbert reale; $a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale bilineare, continuo e coercitivo.

Allora

$$\forall \phi \in H' \exists! u_\phi \in H \text{ t.c. } \phi(v) = a(u_\phi, v) \quad \forall v \in H$$

e risulta

$$|u_\phi|_H \leq \beta^{-1} \|\phi\|_{H'}.$$

Inoltre, se $a(u, v)$ è simmetrico, allora u_ϕ è caratterizzato dalla proprietà

$$\begin{cases} u_\phi \in H \\ u_\phi \text{ minimizza } \frac{1}{2}a(v, v) - \phi(v) \quad \forall v \in H \end{cases}$$

$$\left(\text{cioè } \frac{1}{2} a(u_\phi, u_\phi) - \phi(u_\phi) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \phi(v) \right\} \right).$$

CAPITOLO 7

Introduzione agli Spazi di Sobolev

7.1 Spazi di Sobolev

Definizione 7.1.1. Sia Ω aperto connesso non vuoto di \mathbb{R}^N ($N \geq 2$)²⁰, $1 \leq p \leq +\infty$; lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ è definito da

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) : \right. \\ \left. \int_{\Omega} u(x) \cdot \varphi_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x) = - \int_{\Omega} g_i(x) \cdot \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}.$$

Osservazione 7.1.2. Per ogni $i = 1, \dots, N$ la funzione g_i è unica.

Infatti se è anche (per $i = 1, \dots, N$)

$$\int_{\Omega} u(x) \cdot \varphi_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x) = - \int_{\Omega} h_i(x) \cdot \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

allora

$$\int_{\Omega} (g_i(x) - h_i(x)) \cdot \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

pertanto

$$g_i = h_i \quad \text{q.o. in } \Omega. \quad \square$$

Osserviamo che

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \iff u \in L^p(\Omega) \quad \text{e} \quad \text{tutte le sue } N \text{ derivate parziali prime} \\ \text{nel senso delle distribuzioni sono in } L^p(\Omega),$$

²⁰Per gli spazi di Sobolev, anche in dimensione $N = 1$, si può consultare e.g. [1].

giacché dalla definizione si vede che

$$g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

nel senso delle distribuzioni (o in senso debole).

Evidentemente

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega);$$

se Ω è aperto connesso e limitato di \mathbb{R}^N , si ha

$$C^1(\overline{\Omega}) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega).$$

Osservazione 7.1.3. Si riconosce facilmente che

$$\forall u, v \in W^{1,p}(\Omega) \implies u + v \in W^{1,p}(\Omega),$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \implies \lambda u \in W^{1,p}(\Omega),$$

cioè $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale.

Definizione 7.1.4. Definiamo per $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{1,p} := \|u\|_p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p \quad \text{se } p < \infty$$

($\|\cdot\|_{1,p}$ è ovviamente una norma in $W^{1,p}(\Omega)$; norme topologicamente equivalenti a $\|\cdot\|_{1,p}$ sono:

$$\left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad \|u\|_p + \|\nabla u\|_p,$$

mentre

$$\|u\|_{1,\infty} := \max \{ \|u\|_\infty, \|\nabla u\|_\infty \} \quad \text{se } p = \infty.$$

(Ricordiamo che una norma $\|\cdot\|$ su uno spazio X è topologicamente equivalente alla norma $\|\cdot\|'$ sullo stesso spazio X se esistono $k_1, k_2 > 0$: $k_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq k_2 \|x\| \quad \forall x \in X$).

Teorema 7.1.5.

$$\left(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p} \right) \text{ è uno spazio di Banach,} \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Dimostrazione. Per $1 \leq p < \infty$ sia $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_{1,p}$; quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m > \nu \quad \|u_n - u_m\|_{1,p} < \varepsilon.$$

Poiché

$$\|u_n - u_m\|_{1,p} = \|u_n - u_m\|_p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p$$

si ha che (u_n) è di Cauchy in $L^p(\Omega)$ e per ogni $i = 1, \dots, N$ $\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right)_n$ è di Cauchy in $L^p(\Omega)$.

Per la completezza di $L^p(\Omega)$ si ha che

$$\exists u \in L^p(\Omega) : \quad \|u_n - u\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

e per ogni $i = 1, \dots, N$

$$\exists g_i \in L^p(\Omega) : \quad \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - g_i \right\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Basta ora dimostrare che

$$g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \dots, N$$

nel senso delle distribuzioni, perché da ciò seguirà in definitiva che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\|u_n - u\|_{1,p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, cioè la tesi.

Per dimostrare che

$$g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \dots, N$$

nel senso delle distribuzioni, proviamo che, per ogni $i = 1, \dots, N$,

$$\int_{\Omega} u(x) \cdot \varphi_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x) = - \int_{\Omega} g_i(x) \cdot \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ciò segue, per passaggio al limite per $n \rightarrow +\infty$, da

$$\int_{\Omega} u_n(x) \cdot \varphi_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x) = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \cdot \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

poiché

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (u_n(x) - u(x)) \varphi_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x) \right| &\leq \int_{\Omega} |u_n(x) - u(x)| |\varphi_{x_i}(x)| d\mathcal{L}^N(x) \\ &\leq \|u_n - u\|_p \cdot \|\varphi_{x_i}\|_{p'} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

e

$$\left| \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - g_i(x) \right) \varphi(x) d\mathcal{L}^N(x) \right| \leq \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - g_i \right\|_p \cdot \|\varphi\|_{p'} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad \square$$

Teorema 7.1.6. (Teorema di densità (di Friedrichs))

Sia Ω un aperto connesso di classe C^1 ; $1 \leq p \leq +\infty$.

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \exists (u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N) : \quad u_n|_{\Omega} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \quad \text{in } W^{1,p}(\Omega).$$

In altre parole, le restrizioni a Ω di funzioni di $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ costituiscono un sottospazio denso di $W^{1,p}(\Omega)$.

A differenza di quanto accade per gli spazi $L^p(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ non è denso in $W^{1,p}(\Omega)$.

Definizione 7.1.7. Sia $1 \leq p \leq +\infty$. Definiamo

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega); \exists (u_n) \subset C_0^\infty(\Omega) : u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \text{ in } W^{1,p}(\Omega) \right\}$$

cioè

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)} \quad \text{nella norma di } W^{1,p}(\Omega)$$

(evidentemente è anche $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^1(\Omega)}$ nella norma di $W^{1,p}(\Omega)$).

In un certo senso dunque, lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ è costituito dalle funzioni che “hanno il valore zero” su $\partial\Omega$. Di conseguenza, due funzioni di $W^{1,p}(\Omega)$ “hanno lo stesso valore su $\partial\Omega$ ” se la loro differenza appartiene a $W_0^{1,p}(\Omega)$ ²¹.

Risulta

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega).$$

In generale i due spazi non coincidono, come si deduce dalla considerazione che segue il teorema di Friedrichs, però

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Teorema 7.1.8.

$(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ è uno spazio di Banach.

Dimostrazione. $W_0^{1,p}(\Omega)$ è un sottospazio di $W^{1,p}(\Omega)$, chiuso nella norma $\|\cdot\|_{1,p}$ perché $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$; poiché ogni sottospazio chiuso di uno spazio completo è completo si ha la tesi. \square

²¹Queste questioni vengono trattate con precisione introducendo il concetto di **traccia** di una funzione di $W^{1,p}(\Omega)$ (cfr. e.g. [10]).

7.2 Disuguaglianze di Sobolev in $W^{1,p}(\Omega)$ (teoremi di immersione continua o compatta)

Definizione 7.2.1. Sia $1 \leq p < N$. Si dice esponente di Sobolev di p il numero reale p^* definito da

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

ovvero

$$p^* = \frac{Np}{N-p} > p.$$

Teorema 7.2.2. Sia Ω un aperto connesso e limitato di \mathbb{R}^N , di classe C^1 ; allora

$$(i) \text{ se } 1 \leq p < N: \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$$

$$\text{e si ha} \quad \|u\|_{p^*} \leq c \|u\|_{1,p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega);$$

$$(ii) \text{ se } p = N: \quad W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [N, +\infty[;$$

$$(iii) \text{ se } p > N: \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{dove } \alpha = 1 - \frac{N}{p} \quad (0 < \alpha < 1).$$

La dimostrazione di (i) è dovuta a Sobolev-Gagliardo-Nirenberg; da (i) e dal fatto che $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ per ogni $p \leq q \leq p^*$, segue

$$(i)' \text{ se } 1 \leq p < N: \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, p^*].$$

La (iii) va intesa nel senso della misura di Lebesgue, cioè nella classe di equivalenza di $u \in W^{1,p}(\Omega)$ esiste $\tilde{u} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ (rappresentante α -hölderiana) con $\tilde{u} = u$ q.o. in Ω .

Definizione 7.2.3. Siano X e Y spazi di Banach reali. Un operatore lineare e continuo

$$K : X \rightarrow Y$$

si dice *compatto* se per ogni successione $(u_n) \subset X$ limitata, esiste una sottosuccessione $(u_{n_k}) \subset X$ tale che $(K u_{n_k})$ converge in Y .

Teorema 7.2.4. (Teorema di immersione compatta (Rellich - Kondrachov))

Sia Ω un aperto connesso e limitato di \mathbb{R}^N , di classe C^1 ; allora

$$(i) \text{ se } 1 \leq p < N: \text{ l'immersione } W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ è compatta}$$

$$\text{per ogni } q \text{ tale che } 1 \leq q < p^* = \frac{Np}{N-p}$$

(i.e. da ogni successione limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ si può estrarre una sottosuccessione convergente in $L^q(\Omega)$);

(ii) se $p = N$: l'immersione $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ è compatta per ogni $1 \leq q < \infty$;

(iii) se $p > N$: l'immersione $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ è compatta

(conseguenza della disuguaglianza di Morrey e del teorema di Ascoli-Arzelà).

In particolare l'immersione $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ è compatta per ogni $1 \leq p \leq \infty$.

Osservazione 7.2.5. In generale, se non si fanno ipotesi di regolarità su $\partial\Omega$, non è vera l'immersione

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

Ad esempio, sia $N = 2$, $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, |y| < e^{-\frac{1}{x^2}}\}$ e

$$u(x, y) = x^3 e^{\frac{1}{x^2}}.$$

È immediato verificare che $u \in L^1(\Omega)$ e anche ogni sua derivata parziale prima (in senso classico) appartiene a $L^1(\Omega)$. Dunque $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Ma $u \notin L^p(\Omega)$ per nessun $p > 1$.

Se $p = N$ in generale $u \notin L^\infty(\Omega)$. Ad esempio, se $N = 2$ e $\Omega = B_{\frac{1}{2}}((0, 0))$ la funzione

$$u(x, y) = \left(\log \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^\alpha$$

con $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ appartiene a $W^{1,2}(B_{\frac{1}{2}}(0, 0))$ ma essa non è limitata a causa della singolarità in $(0, 0)$.

Ci limitiamo a dimostrare le disuguaglianze di Sobolev (relativamente alle sole immersioni continue) nel sottospazio $W_0^{1,p}(\Omega)$; è utile osservare che (evidentemente) in tale spazio non è necessaria alcuna ipotesi di regolarità su Ω .

7.3 Disuguaglianze di Sobolev in $W_0^{1,p}(\Omega)$

Teorema 7.3.1. Sia Ω un aperto connesso e limitato di \mathbb{R}^N ; allora

$$(i) \text{ se } 1 \leq p < N: \quad W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, p^*]$$

e si ha:

$$\exists C(p, N) > 0: \quad \|u\|_{p^*} \leq C(p, N) \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad {}^{22}$$

$$\text{dove } C(p, N) = \frac{p(N-1)}{N-p} = \frac{p^*}{1^*};$$

²²Il valore di p^* si può ottenere mediante un argomento di omogeneità (cfr. e.g. [1], p. 163.)

$$(ii) \text{ se } p = N: \quad W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [N, +\infty[;$$

$$(iii) \text{ se } p > N: \quad W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{dove } \alpha = 1 - \frac{N}{p} \quad (0 < \alpha < 1).$$

Osserviamo che in (i) la costante $C(p, N) = \frac{p(N-1)}{N-p}$ non è quella ottimale.

Alla dimostrazione delle disuguaglianze di Sobolev premettiamo il seguente risultato.

Lemma 7.3.2. (*Lemma di Gagliardo*)

Posto

$$\hat{x}_i := (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (N \geq 2),$$

se le $v_i = v_i(\hat{x}_i)$ per ogni $i = 1, \dots, N$ sono non negative e $v_i \in L^{N-1}(\mathbb{R}_{\hat{x}_i}^{N-1})$ allora

$$v(x) = v_1(\hat{x}_1) \cdot v_2(\hat{x}_2) \cdot \dots \cdot v_N(\hat{x}_N) \in L^1(\mathbb{R}_x^N)$$

e si ha

$$\|v\|_1 = \left\| \prod_{i=1}^N v_i \right\|_{1, \mathbb{R}^N} \leq \prod_{i=1}^N \|v_i\|_{N-1, \mathbb{R}_{\hat{x}_i}^{N-1}}.$$

Dimostrazione delle disuguaglianze di Sobolev (in $W_0^{1,p}(\Omega)$).

Dimostrazione di (i).

Dimostreremo (i) prima per $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Poi estenderemo la tesi alle funzioni $u \in W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$.

Primo passo. Sia dapprima $p = 1$; possiamo assumere $\Omega = \mathbb{R}^N$. Allora $C(1, N) = 1$ e la tesi diventa

$$\|u\|_{1^*} = \|u\|_{\frac{N}{N-1}} \leq \|\nabla u\|_1.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale (u è a supporto compatto in Ω) si ha:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N) d\mathcal{L}^1(t)$$

e quindi

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N)| d\mathcal{L}^1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)| d\mathcal{L}^1(x_i)$$

per ogni $i = 1, \dots, N$.

Pertanto

$$|u(x)|^{\frac{1}{N-1}} \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)| d\mathcal{L}^1(x_i) \right)^{\frac{1}{N-1}} \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Moltiplicando membro a membro risulta

$$|u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \leq \prod_{i=1}^N \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)| \, d\mathcal{L}^1(x_i) \right)^{\frac{1}{N-1}};$$

posto

$$v_i(\hat{x}_i) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)| \, d\mathcal{L}^1(x_i) \right)^{\frac{1}{N-1}},$$

e applicando il lemma di Gagliardo 7.3.2 si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \, d\mathcal{L}^N(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{i=1}^N v_i(\hat{x}_i) \, d\mathcal{L}^N(x) \\ &\leq \prod_{i=1}^N \|v_i\|_{N-1, \mathbb{R}_{\hat{x}_i}^{N-1}} \\ &= \prod_{i=1}^N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |D_i u(x)| \, d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{N-1}}, \end{aligned}$$

dove per l'ultima uguaglianza basta osservare che

$$\begin{aligned} \|v_i\|_{N-1, \mathbb{R}_{\hat{x}_i}^{N-1}} &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)| \, d\mathcal{L}^1(x_i) \right)^{\frac{1}{N-1}} \right]^{N-1} d\mathcal{L}^{N-1}(\hat{x}_i) \right\}^{\frac{1}{N-1}} \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)| \, d\mathcal{L}^1(x_i) \right] d\mathcal{L}^{N-1}(\hat{x}_i) \right\}^{\frac{1}{N-1}} \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |D_i u(x)| \, d\mathcal{L}^N(x) \right\}^{\frac{1}{N-1}}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \, d\mathcal{L}^N(x) &\leq \prod_{i=1}^N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |D_i u(x)| \, d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{N-1}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)| \, d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{N}{N-1}}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

cioè

$$\|u\|_{\frac{N}{N-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \, d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{N-1}{N}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)| \, d\mathcal{L}^N(x) = \|\nabla u\|_1.$$

Osserviamo che la (7.1) è vera anche per funzioni di classe $C_0^1(\Omega)$ o per funzioni $C^1(\Omega)$ q.o., a supporto compatto in Ω .

Secondo passo. Sia ora $1 < p < N$ e $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Considerata la funzione ausiliaria

$$v := |u|^{\frac{p^*}{1^*}-1} \cdot u$$

si ha

$$|\nabla v| = \frac{p^*}{1^*} |u|^{\frac{p^*}{1^*}-1} |\nabla u| \quad \text{q.o. in } \Omega$$

dove

$$\frac{p^*}{1^*} = \frac{p(N-1)}{N-p} =: C(p, N)$$

e

$$\frac{p^*}{1^*} - 1 = \frac{N(p-1)}{N-p}.$$

Applicando (7.1) a v risulta

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*} d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{N-1}{N}} &\leq C(p, N) \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N(p-1)}{N-p}} |\nabla u(x)| d\mathcal{L}^N(x) \\ &\quad \text{(applicando la disuguaglianza di Hölder)} \\ &\leq C(p, N) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N(p-1)}{N-p} \cdot p'} d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= C(p, N) \|\nabla u\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*} d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

quindi

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*} d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{N-1}{N} - \frac{p-1}{p}} \leq C(p, N) \|\nabla u\|_p,$$

e poiché $\frac{N-1}{N} - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p^*}$ risulta in definitiva

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p^*} d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C(p, N) \|\nabla u\|_p.$$

Terzo passo. Dimostriamo ora (i) in $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$. Sia $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, allora

$$\exists (u_n) \subset C_0^\infty(\Omega) : \quad \|u_n - u\|_{1,p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (7.2)$$

Per quanto già dimostrato si ha

$$\|u_n\|_{p^*} \leq C(p, N) \|\nabla u_n\|_p \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (7.3)$$

(osserviamo che $C(p, N)$ non dipende da $n \in \mathbb{N}$). Da (7.3) e (7.2) segue che (u_n) è di Cauchy in $L^{p^*}(\Omega)$, pertanto

$$\exists v \in L^{p^*}(\Omega) : \quad \|u_n - v\|_{p^*} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Osserviamo che

$$0 \leq \|u - v\|_p \leq \|u_n - u\|_p + \|u_n - v\|_p \leq \|u_n - u\|_p + |\Omega|^{\frac{1}{N}} \|u_n - v\|_{p^*},$$

da qui, passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, si deduce che $v = u$ q.o. in Ω . Allora passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ nella (7.3) si ha in definitiva

$$\|v\|_{p^*} = \|u\|_{p^*} \leq C(p, N) \|\nabla u\|_p,$$

cioè la tesi. □

Dimostrazione di (ii).

Basta provare (ii) per le funzioni $u \in C_0^\infty(\Omega)$, perché poi si estende per densità a $W_0^{1,N}(\Omega)$.

Proviamo che

$$\exists C > 0 : \quad \|u\|_q \leq C \|u\|_{1,N} \quad \forall q \in [N, +\infty[\quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Da (7.1) si ha, per $u \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\|u\|_{\frac{N}{N-1}} \leq \|\nabla u\|_1. \quad (7.4)$$

Considerata la funzione ausiliaria

$$v := |u|^t \quad (t > 1)$$

da (7.4) risulta

$$\begin{aligned} \|u\|_{\frac{tN}{N-1}}^t &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{t \cdot \frac{N}{N-1}} d\mathcal{L}^N(x) \right)^{\frac{N-1}{N}} \\ &\leq t \cdot \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{t-1} |\nabla u| d\mathcal{L}^N(x) \leq t \|u\|_{(t-1)p'}^{t-1} \cdot \|\nabla u\|_p. \end{aligned}$$

Segue che

$$\|u\|_{\frac{tN}{N-1}} \leq t^{\frac{1}{t}} \|u\|_{(t-1)p'}^{\frac{t-1}{t}} \cdot \|\nabla u\|_p^{\frac{1}{t}} \leq e^{\frac{1}{e}} \|u\|_{(t-1)p'}^{\frac{t-1}{t}} \cdot \|\nabla u\|_p^{\frac{1}{t}}.$$

Possiamo supporre

$$\|u\|_{(t-1)p'}^{\frac{t-1}{t}} > 0 \quad \text{e} \quad \|\nabla u\|_p^{\frac{1}{t}} > 0$$

(diversamente la tesi è banale).

Per la disuguaglianza di Young (osservato che $\frac{t-1}{t} + \frac{1}{t} = 1$) si ha (ricordato che per ipotesi $p = N$)

$$\|u\|_{(t-1)p'}^{\frac{t-1}{t}} \cdot \|\nabla u\|_p^{\frac{1}{t}} \leq \frac{t-1}{t} \|u\|_{(t-1)\frac{N}{N-1}} + \frac{1}{t} \|\nabla u\|_N,$$

quindi

$$\begin{aligned} \|u\|_{\frac{tN}{N-1}} &\leq e^{\frac{1}{e}} \left(\frac{t-1}{t} \|u\|_{(t-1)\frac{N}{N-1}} + \frac{1}{t} \|\nabla u\|_N \right) \\ &\leq e^{\frac{1}{e}} \left(\|u\|_{(t-1)\frac{N}{N-1}} + \|\nabla u\|_N \right) \\ &\leq C \left(\|u\|_{(t-1)\frac{N}{N-1}} + \|\nabla u\|_N \right), \end{aligned}$$

con $C = e^{\frac{1}{e}}$. Poiché la disuguaglianza precedente vale per ogni $t > 1$, in particolare essa è vera per $t = N$ (essendo $N \geq 2$):

$$\|u\|_{\frac{N^2}{N-1}} \leq C (\|u\|_N + \|\nabla u\|_N)$$

e quindi (per densità)

$$W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N^2}{N-1}}(\Omega).$$

Osservato che $\frac{N^2}{N-1} > N$, si ha anche (per interpolazione (Teorema 4.4.1))

$$W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in \left[N, \frac{N^2}{N-1} \right] ;$$

iterando questo argomento con $t = N + 1, t = N + 2, \dots$, si ha la tesi.

Notiamo, infine, che per dimostrare (ii) è sufficiente anche osservare che per $p \rightarrow N$ risulta $p^* = \frac{Np}{N-p} \rightarrow +\infty$. Osserviamo che la costante $C(p, N) = \frac{p(N-1)}{N-p} \rightarrow +\infty$ per $p \rightarrow N$. \square

Dimostrazione di (iii) (disuguaglianza di Morrey).

Ricordiamo che posto per $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$

$$\|u\|_\alpha := \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + [u]_{0,\alpha}$$

$\|\cdot\|_\alpha$ è una norma in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e lo spazio

$$(C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\alpha)$$

è completo.

È sufficiente provare che

$$\exists C(p, N) > 0 : \quad [u]_{0,\alpha} \leq C(p, N) \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (7.5)$$

e

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq C(p, N)(\text{diam } \Omega)^\alpha \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (7.6)$$

Proviamo prima la (7.5) e poi la (7.6) in $C_0^\infty(\Omega)$; queste si estendono poi per densità a $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Per provare la (7.5) dimostriamo che

$$\begin{aligned} \exists C(p, N) > 0 : \quad & \forall x, y \in \Omega, \quad x \neq y, \\ & |u(x) - u(y)| \leq C(p, N) \cdot |x - y|^\alpha \cdot \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Sia $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $x, y \in \Omega$, $x \neq y$. Poniamo $\delta := |x - y| > 0$ e

$$S := B_\delta(x) \cap B_\delta(y) \cap \Omega.$$

Risulta

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(z) - u(x)| + |u(y) - u(z)| \quad \forall z \in S.$$

Integrando su S rispetto a z si ha:

$$|S| \cdot |u(x) - u(y)| \leq \int_S |u(z) - u(x)| \, d\mathcal{L}^N(z) + \int_S |u(y) - u(z)| \, d\mathcal{L}^N(z).$$

Ma $|B_\delta| = \omega_N \delta^N$ da cui $|S| = C(N) \delta^N$ e quindi

$$C(N) \delta^N |u(x) - u(y)| \leq \int_S |u(z) - u(x)| d\mathcal{L}^N(z) + \int_S |u(y) - u(z)| d\mathcal{L}^N(z). \quad (7.7)$$

Valutiamo il primo integrale; il secondo si maggiorerà allo stesso modo.

Osservato che

$$u(z) - u(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(x + t(z - x)) d\mathcal{L}^1(t) = \int_0^1 (z - x) \cdot \nabla u(w) d\mathcal{L}^1(t)$$

dove $w = x + t(z - x)$, si ha per ogni $z \in S$

$$|u(z) - u(x)| \leq \int_0^1 |z - x| \cdot |\nabla u(w)| d\mathcal{L}^1(t) \leq \delta \int_0^1 |\nabla u(w)| d\mathcal{L}^1(t)$$

e integrando rispetto alla variabile $z \in S$

$$\begin{aligned} \int_S |u(z) - u(x)| d\mathcal{L}^N(z) &\leq \delta \int_S d\mathcal{L}^N(z) \int_0^1 |\nabla u(w)| d\mathcal{L}^1(t) \\ &= \delta \int_0^1 d\mathcal{L}^1(t) \int_S |\nabla u(w)| d\mathcal{L}^N(z). \end{aligned}$$

Ora (osservato che $|z - x| < \delta \implies |w - x| < t\delta$)

$$\int_S |\nabla u(w)| d\mathcal{L}^N(z) \leq \int_{B_{t\delta}(x)} |\nabla u(w)| d\mathcal{L}^N(z) = t^{-N} \int_{B_{t\delta}(x)} |\nabla u(w)| d\mathcal{L}^N(w).$$

Usando la disuguaglianza di Hölder il secondo membro si maggiora:

$$\begin{aligned} \int_{B_{t\delta}(x)} 1 \cdot |\nabla u(w)| d\mathcal{L}^N(w) &\leq |B_{t\delta}(x)|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{t\delta}(x)} |\nabla u(w)|^p d\mathcal{L}^N(w) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \omega_N^{1-\frac{1}{p}} (t\delta)^{N(1-\frac{1}{p})} \cdot \|\nabla u\|_p. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int_S |u(z) - u(x)| d\mathcal{L}^N(z) &\leq \omega_N^{1-\frac{1}{p}} \cdot \delta^{N+1-\frac{N}{p}} \cdot \|\nabla u\|_p \cdot \int_0^1 t^{-\frac{N}{p}} d\mathcal{L}^1(t) \\ &\quad (\text{con } p > N \text{ per ipotesi}) \\ &= \omega_N^{1-\frac{1}{p}} \cdot \delta^{N+1-\frac{N}{p}} \cdot \|\nabla u\|_p \cdot \frac{1}{1-\frac{N}{p}} \\ &= \omega_N^{1-\frac{1}{p}} \cdot \delta^{N+\alpha} \cdot \|\nabla u\|_p \cdot \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Tornando a (7.7) si ha

$$C(N) \delta^N |u(x) - u(y)| \leq 2 \cdot \omega_N^{1-\frac{1}{p}} \cdot \delta^{N+\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \|\nabla u\|_p$$

da cui

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{2\omega_N^{1-\frac{1}{p}}}{\alpha C(N)} \cdot \delta^\alpha \cdot \|\nabla u\|_p = C(p, N) \cdot |x - y|^\alpha \cdot \|\nabla u\|_p$$

e quindi (7.5).

Proviamo la (7.6).

Sia $y \in \Omega$ tale che $u(y) = 0$. Dalla (7.5) si ricava

$$|u(x)| \leq C(p, N) \cdot |x - y|^\alpha \cdot \|\nabla u\|_p \leq C(p, N) \cdot (\text{diam } \Omega)^\alpha \cdot \|\nabla u\|_p$$

per ogni $x \in \Omega$ e quindi segue la (7.6). \square

7.4 Disuguaglianze di Poincaré

Teorema 7.4.1. (Disuguaglianza di Poincaré in $W_0^{1,p}(\Omega)$)

Sia Ω un aperto connesso e limitato di \mathbb{R}^N ; allora

$$\exists C(\Omega, p, N) = C(p, N) |\Omega|^{\frac{1}{N}} > 0 :$$

$$\|u\|_p \leq C(\Omega, p, N) \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall 1 \leq p \leq +\infty.$$

Osserviamo che l'ipotesi “ Ω limitato” può essere indebolita richiedendo che Ω sia limitato almeno in una direzione, ma non può essere eliminata.

Dimostrazione della disuguaglianza di Poincaré.

Sia $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$. Per il caso (i) delle disuguaglianze di Sobolev (osservato che $\frac{N}{N-1} \leq N$ poiché $N \geq 2$) si ha

$$\|u\|_{p^*} \leq C(p, N) \|\nabla u\|_p.$$

Poiché $p^* > p$ si ha $L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ e quindi

$$\|u\|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}} \cdot \|u\|_{p^*} = |\Omega|^{\frac{1}{N}} \|u\|_{p^*}.$$

Pertanto

$$\|u\|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{N}} \cdot C(p, N) \|\nabla u\|_p = C(\Omega, p, N) \|\nabla u\|_p$$

per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Sia ora $p \geq \frac{N}{N-1}$; definiamo $r := \frac{Np}{N+p}$ e osserviamo che $1 \leq r < N$

$$\left(r \geq 1 \iff p \geq \frac{N}{N-1} \right).$$

Considerato $r^* = \frac{Nr}{N-r}$ (l'esponente di Sobolev di r), risulta $r^* = p$ e quindi, ancora per il caso (i) delle disuguaglianze di Sobolev

$$\|u\|_p = \|u\|_{r^*} \leq C(r, N) \|\nabla u\|_r \leq C(\Omega, p, N) \|\nabla u\|_{r^*=p}. \quad \square$$

Corollario 7.4.2. In $W_0^{1,p}(\Omega)$ le norme $\|u\|_{1,p}$ e $\|\nabla u\|_p$ sono topologicamente equivalenti.

Infatti

$$\|\nabla u\|_p \leq \|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p \leq (C(\Omega, p, N) + 1) \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad \square$$

Osservazione 7.4.3. La disuguaglianza di Poincaré dimostrata in $W_0^{1,p}(\Omega)$ non vale per le costanti non-identicamente nulle in Ω . Ciò preclude pertanto la possibilità che quella stessa disuguaglianza possa valere in $W^{1,p}(\Omega)$.

Tuttavia sussiste il seguente risultato

Teorema 7.4.4. (Disuguaglianza di Poincaré in $W^{1,p}(\Omega)$)
Sia Ω un aperto connesso e limitato di \mathbb{R}^N , di classe C^1 ; allora

$$\exists C(\Omega, p, N) > 0 : \quad \|u - u_\Omega\|_p \leq C(\Omega, p, N) \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega),$$

dove

$$u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) d\mathcal{L}^N(x) \quad .$$

Osservazione 7.4.5. Nelle ipotesi della disuguaglianza di Poincaré (in $W^{1,p}(\Omega)$), se $1 \leq p < N$ si ha la seguente **disuguaglianza di Sobolev-Poincaré**

$$\|u - u_\Omega\|_{p^*} \leq c(\Omega, p, N) \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

CAPITOLO 8

Principio di Dirichlet

8.1 Principio di Dirichlet

Riprendendo sostanzialmente un'idea di Gauss e di Green, Riemann osservò che l'esistenza in un aperto Ω del piano di una funzione armonica u che assume sulla frontiera di Ω valori assegnati φ poteva essere ottenuta come minimo dell'integrale dell'energia

$$D(v) := \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 d\mathcal{L}^N(x),$$

in una classe di funzioni ammissibili con lo stesso dato su $\partial\Omega$ ²³.

Riemann considerava questo risultato, noto come Principio di Dirichlet, un assioma; ma Weierstrass, per primo, si rese conto che esso costituiva l'enunciato di un teorema da precisare nelle ipotesi e per il quale dare una dimostrazione. Questo è stato possibile conseguire, dopo il 1900, con l'introduzione degli spazi di Sobolev.

Riportiamo tre obiezioni sollevate al Principio di Dirichlet.

8.2 Obiezione (generale) di Weierstrass (1869)

Weierstrass fu il primo a mostrare che non sempre un problema di minimo per un funzionale del Calcolo delle Variazioni, con integrando non negativo, ha una soluzione.

²³In questo modo Riemann dava inizio ai cosiddetti “metodi diretti” nel Calcolo delle Variazioni, che consistono nel provare l'esistenza del minimo di un funzionale integrale

$$F(v) = \int_{\Omega} f(x, v(x), \nabla v(x)) d\mathcal{L}^N(x),$$

senza ricorrere all'equazione di Euler, ma deducendola direttamente dalle proprietà del funzionale F .

Il problema proposto da Weierstrass consiste nel cercare il minimo del funzionale (in dimensione $N = 1$)

$$F(v) = \int_{-1}^1 t^2 |v'(t)|^2 d\mathcal{L}^1(t)$$

nella classe delle funzioni $v \in C^1([-1, 1])$ che soddisfano le condizioni agli estremi $v(-1) = -1, v(1) = 1$.

Osserviamo che su ognuna di queste funzioni ammissibili v si ha $F(v) > 0$, in quanto, in caso contrario, si avrebbe $v'(t) = 0$ in $[-1, 1]$ e, di conseguenza, v sarebbe costante in $[-1, 1]$, in contrasto con le condizioni agli estremi. Dunque, se esistesse una soluzione v_0 del problema, si avrebbe $F(v_0) > 0$. Ma, se consideriamo le funzioni ammissibili

$$v_\varepsilon(t) = \frac{\arctan\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (\varepsilon > 0)$$

per le quali

$$F(v_\varepsilon) = \int_{-1}^1 t^2 |v'_\varepsilon(t)|^2 d\mathcal{L}^1(t) = \frac{\varepsilon}{\arctan^2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \left(\arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \right)$$

si ottiene $F(v_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$. Ne segue che per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo vale la disuguaglianza $F(v_\varepsilon) < F(v_0)$, che contraddice il fatto che v_0 è di minimo per F .

8.3 Obiezione di Courant

Una successione minimizzante non necessariamente converge e quindi, in generale, non ci si può aspettare di trovare la soluzione di un problema di minimo via un passaggio al limite, almeno in topologie forti.

Che l'integrale di Dirichlet non sia esente da questa difficoltà è provato dal seguente esempio.

Sia $N = 2$ e definiamo, in coordinate polari (r, ϑ) , la seguente successione di funzioni:

$$v_n(r, \vartheta) = \begin{cases} c_n \log r_n & r \leq r_n^2 \\ c_n \log\left(\frac{r}{r_n}\right) & r_n^2 \leq r \leq r_n \\ 0 & r_n \leq r \leq 1 \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

dove le c_n sono costanti.

Si ha ²⁴

$$\begin{aligned} D(v_n) &= 2\pi c_n^2 \int_{r_n^2}^{r_n} \frac{1}{r^2} r d\mathcal{L}^1(r) \\ &= -2\pi c_n^2 \log r_n; \end{aligned}$$

²⁴Considerate le coordinate polari piane (r, ϑ) l'integrale di Dirichlet per $v(r, \vartheta)$ in $B_\varrho(0)$ è dato da

$$\int_0^\varrho \left(\int_0^{2\pi} \left(v_r^2 + \frac{1}{r^2} v_\vartheta^2 \right) d\mathcal{L}^1(\vartheta) \right) r d\mathcal{L}^1(r).$$

se scegliamo

$$c_n = -n^{-\frac{2}{3}} \quad \text{e} \quad r_n = e^{-n}$$

risulta

$$D(v_n) = 2\pi n^{-\frac{1}{3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (= \inf \text{ dell'integrale di Dirichlet})$$

cioè (v_n) è una successione (con $v_n(1, \vartheta) = 0$) minimizzante per $D(\cdot)$, tuttavia

$$v_n(e^{-2n}, \vartheta) = n^{\frac{1}{3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

e quindi la successione (v_n) non converge nemmeno puntualmente.

Per poter applicare il metodo diretto bisogna allora allargare la classe delle funzioni ammissibili dove era inizialmente ambientato il Principio “classico” di Dirichlet (classe di funzioni continue!) in modo da guadagnare compattezza delle successioni minimizzanti.

8.4 Obiezione (specifica) di Hadamard

Prima di illustrare l'obiezione specifica di Hadamard, premettiamo quanto segue.

Sia $N = 2$ e indichiamo con (r, ϑ) le coordinate polari piane.

Sia φ continua su $\partial B_1(0)$. Consideriamo la (non necessariamente convergente) serie di Fourier per φ :

$$\varphi(\vartheta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{+\infty} (a_\nu \cos \nu \vartheta + b_\nu \sin \nu \vartheta).$$

Si riconosce facilmente che la serie convergente ($r < 1$)

$$v(r, \vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{+\infty} r^\nu (a_\nu \cos \nu \vartheta + b_\nu \sin \nu \vartheta)$$

è l'unica soluzione del problema²⁵

$$\begin{cases} \Delta_{r,\vartheta} v(r, \vartheta) = 0 & \text{in } B_1(0) \\ v(1, \vartheta) = \varphi(\vartheta) & 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \end{cases},$$

e per l'integrale di Dirichlet in $B_1(0)$ per $v(r, \vartheta)$ si ha

$$\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(v_r^2 + \frac{1}{r^2} v_\vartheta^2 \right) d\mathcal{L}^1(\vartheta) \right) r d\mathcal{L}^1(r) = \pi \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu (a_\nu^2 + b_\nu^2) \quad (8.1)$$

²⁵L'operatore di Laplace in coordinate polari piane (r, ϑ) per $v(r, \vartheta)$ è dato da

$$\Delta_{r,\vartheta} v(r, \vartheta) = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\vartheta\vartheta}.$$

e pertanto l'integrale di Dirichlet in $B_1(0)$ per la funzione armonica $v(r, \vartheta)$ è finito se, e solo se, questa serie converge.

La obiezione (specifica) di Hadamard consiste nel fatto che:

esistono funzioni continue $\varphi(\vartheta)$ per le quali la serie (8.1) diverge, anche se il relativo problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace può essere risolto.

Quindi la soluzione del problema di Dirichlet non può essere determinata dal Principio di Dirichlet per tutti i dati φ continui sulla frontiera.

Per esempio²⁶, se consideriamo la funzione continua di $\vartheta \in [0, 2\pi]$ (definita dallo sviluppo di Fourier totalmente convergente)

$$\varphi(\vartheta) = \sum_{\mu=1}^{+\infty} \frac{\cos(\mu^4 \vartheta)}{\mu^2}$$

si ha che la funzione di r e ϑ

$$v(r, \vartheta) = \sum_{\mu=1}^{+\infty} r^{\mu^4} \frac{\cos(\mu^4 \vartheta)}{\mu^2}$$

è armonica regolare in $B_1(0)$ e ha traccia $\varphi(\vartheta)$ su $\partial B_1(0)$.

Tuttavia per (8.1) $\left(\text{in questo caso } a_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\mu^2} & \text{se } \nu = \mu^4 \\ 0 & \text{se } \nu \neq \mu^4 \end{cases} \text{ e } b_\nu \equiv 0 \right)$

$$D(v) = +\infty.$$

Per evitare quest'ultima difficoltà e per dare quindi una corretta formulazione del Principio di Dirichlet faremo la seguente ipotesi:

\exists almeno una funzione \bar{v} "ammissibile" con $D(\bar{v}) < +\infty$.

²⁶Altro esempio: se

$$\varphi(\vartheta) = \sum_{\mu=1}^{+\infty} \frac{\sin(\mu! \vartheta)}{\mu^2},$$

si ha

$$v(r, \vartheta) = \sum_{\mu=1}^{+\infty} r^{\mu!} \frac{\sin(\mu! \vartheta)}{\mu^2}$$

e per (8.1) $\left(\text{in questo caso } b_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\mu^2} & \text{se } \nu = \mu! \\ 0 & \text{se } \nu \neq \mu! \end{cases} \text{ e } a_\nu \equiv 0 \right)$

$$D(v) = \pi \sum_{\mu=1}^{+\infty} \frac{\mu!}{\mu^4} = +\infty.$$

Osserviamo che per costruire esempi basta trovare successioni (a_ν) e (b_ν) tali che $\sum_{\nu=1}^{+\infty} (|a_\nu| + |b_\nu|)$

converge, mentre $\pi \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu (a_\nu^2 + b_\nu^2)$ diverge positivamente.

È comunque importante osservare che mentre nella teoria del potenziale questa ipotesi non è necessaria, essa è invece essenziale (e va interpretata come una richiesta di “energia finita”) per un significativo problema variazionale.

Alla luce di queste obiezioni vedremo che l’ambiente naturale per il Principio di Dirichlet è lo spazio di Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$.

8.5 Principio di Dirichlet in $W^{1,2}(\Omega)$: esistenza e regolarità interna

Teorema 8.5.1. *Sia Ω aperto connesso limitato di \mathbb{R}^N ($N \geq 2$), $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ e sia*

$$\mathcal{A}_\varphi = \left\{ v \in W^{1,2}(\Omega); \quad v - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \right\}$$

(convesso, chiuso, non vuoto di $W^{1,2}(\Omega)$).

Allora

- (i) $\exists u_0 \in \mathcal{A}_\varphi : D(u_0) = \min_{v \in \mathcal{A}_\varphi} D(v);$
- (ii) u_0 è (equivalente ad una funzione) armonica in Ω ²⁷;
- (iii) u_0 è analitica reale.

Dimostrazione.

(i) Esistenza.

Per l’esistenza diamo qui una dimostrazione che sfrutta essenzialmente il fatto che l’integrale di Dirichlet $D(\cdot)$ è quadratico nel gradiente.

Risulta

$$\mathcal{A}_\varphi \neq \emptyset \quad \text{e} \quad 0 \leq D(v) \quad \forall v \in \mathcal{A}_\varphi,$$

quindi $D(\cdot)$ è limitato inferiormente e posto

$$d := \inf_{v \in \mathcal{A}_\varphi} D(v),$$

poiché $D(\varphi) < +\infty$, si ha

$$0 \leq d < +\infty.$$

²⁷Quindi $u_0 \in \mathcal{A}_\varphi$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \end{cases}$$

Sia $(v_n) \subset \mathcal{A}_\varphi$ una successione minimizzante per $D(\cdot)$, cioè sia $v_n \in W^{1,2}(\Omega)$, $v_n - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e

$$D(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d.$$

Proviamo che (v_n) è di Cauchy in $W^{1,2}(\Omega)$.

Per ogni $j, k \in \mathbb{N}$ si ha

$$D(v_j - v_k) + D(v_j + v_k) = 2D(v_j) + 2D(v_k)$$

da cui

$$D(v_j - v_k) = 2D(v_j) + 2D(v_k) - D(v_j + v_k) = 2D(v_j) + 2D(v_k) - 4D\left(\frac{v_j + v_k}{2}\right).$$

Osservato che

$$\frac{v_j + v_k}{2} \in \mathcal{A}_\varphi$$

risulta

$$0 \leq D(v_j - v_k) \leq 2D(v_j) + 2D(v_k) - 4d$$

e quindi

$$\exists \lim_{j,k \rightarrow +\infty} D(v_j - v_k) = 0.$$

Osserviamo che $v_j - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $v_k - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e quindi $v_j - v_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Poiché Ω è limitato, dalla disuguaglianza di Poincaré in $W_0^{1,2}(\Omega)$ (Corollario 7.4.2), si ha che esiste

$$\lim_{j,k \rightarrow +\infty} \|v_j - v_k\|_{1,2} = 0.$$

Quindi (v_n) è di Cauchy in $W^{1,2}(\Omega)$.

Allora

$$\exists u_0 \in W^{1,2}(\Omega) : \lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - u_0\|_{1,2} = 0,$$

inoltre si ha $u_0 - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, quindi $u_0 \in \mathcal{A}_\varphi$, ed evidentemente si ha

$$d = \lim_{n \rightarrow +\infty} D(v_n) = D(u_0).$$

Risulta così provata l'esistenza.

Unicità della soluzione variazionale u_0 .

Se anche $v_0 \in \mathcal{A}_\varphi$ è tale che

$$d = \min_{v \in \mathcal{A}_\varphi} D(v) = D(v_0),$$

si ha

$$0 \leq D(u_0 - v_0) = 2D(u_0) + 2D(v_0) - 4D\left(\frac{u_0 + v_0}{2}\right) \leq 2d + 2d - 4d = 0,$$

e quindi

$$D(u_0 - v_0) = 0.$$

Ma $u_0, v_0 \in \mathcal{A}_\varphi$ per cui $u_0 - v_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e quindi, per la disuguaglianza di Poincaré (Teorema 7.4.1),

$$\|u_0 - v_0\|_2 = 0$$

cioè v_0 è nella stessa classe di equivalenza di u_0 .

(ii) Consideriamo

$$u_0 + t\zeta \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \text{ e } \zeta \in C_0^\infty(\Omega).$$

Poiché $(u_0 + t\zeta) - \varphi = (u_0 - \varphi) + t\zeta \in W_0^{1,2}(\Omega)$ si ha che

$$u_0 + t\zeta \in \mathcal{A}_\varphi.$$

Per il teorema di Fermat dev'essere

$$\left[\frac{d}{dt} D(u_0 + t\zeta) \right]_{t=0} = 0$$

e quindi, essendo

$$D(u_0 + t\zeta) = D(u_0) + t^2 D(\zeta) + 2t \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (u_0)_{x_i}(x) \cdot \zeta_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x)$$

e

$$\frac{d}{dt} D(u_0 + t\zeta) = 2t D(\zeta) + 2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (u_0)_{x_i}(x) \cdot \zeta_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x),$$

si ha

$$\left[\frac{d}{dt} D(u_0 + t\zeta) \right]_{t=0} = 2 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (u_0)_{x_i}(x) \cdot \zeta_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x) = 0$$

ovvero

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (u_0)_{x_i}(x) \cdot \zeta_{x_i}(x) d\mathcal{L}^N(x) = 0 \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(\Omega),$$

e quindi

$$\int_{\Omega} u_0(x) \Delta \zeta(x) d\mathcal{L}^N(x) = 0 \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(\Omega)$$

(Equazione di Euler in forma debole (1744)).

Sussiste il seguente lemma.

Lemma 8.5.2. (Lemma di Caccioppoli (1937) - Weyl (1940))

Sia $u \in L^1(\Omega)$ tale che

$$\int_{\Omega} u(x) \Delta \zeta(x) d\mathcal{L}^N(x) = 0 \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(\Omega) \quad (8.2)$$

Allora u è armonica in Ω e quindi $u \in C^\infty(\Omega)$.

Dimostrazione. Consideriamo le regolarizzate di u con mollificatore ρ radiale:

$$u_n(x) = \frac{n^N}{\|\rho\|_1} \int_{\Omega} \rho(n|x-y|) u(y) d\mathcal{L}^N(y).$$

Fissato $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, scegliamo n sufficientemente grande da verificare

$$\text{dist}(\text{supp } \zeta, \partial\Omega) > \frac{1}{n}.$$

Risulta

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_n(x) \Delta \zeta(x) d\mathcal{L}^N(x) &= \int_{\Omega} \left[\frac{n^N}{\|\rho\|_1} \int_{\Omega} \rho(n|x-y|) u(y) d\mathcal{L}^N(y) \right] \Delta \zeta(x) d\mathcal{L}^N(x) \\ &\quad \text{(per il teorema di Fubini)} \\ &= \int_{\Omega} u(y) \left[\frac{n^N}{\|\rho\|_1} \int_{\Omega} \rho(n|x-y|) \Delta \zeta(x) d\mathcal{L}^N(x) \right] d\mathcal{L}^N(y) \\ &\quad \left(\text{poich\'e } (\Delta \zeta)_n = \Delta \zeta_n, \text{ essendo} \right. \\ &\quad \left. \zeta_n(y) = \frac{n^N}{\|\rho\|_1} \int_{\Omega} \rho(n|x-y|) \zeta(x) d\mathcal{L}^N(x) \right) \\ &= \int_{\Omega} u(y) \Delta \zeta_n(y) d\mathcal{L}^N(y). \end{aligned}$$

Applicando l'ipotesi (8.2) a $\zeta_n \in C_0^\infty(\Omega)$ (per la scelta fatta su n):

$$\int_{\Omega} u_n(x) \Delta \zeta(x) d\mathcal{L}^N(x) = 0. \quad (8.3)$$

Per il Teorema 5.1.10 $u_n \in C^\infty(\Omega_n)$ e pertanto da (8.3) per il Corollario 5.4.3

$$\Delta u_n = 0 \quad \text{in } \Omega_n$$

dove $\Omega_n := \left\{ x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n} \right\}$.

Inoltre

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} |u_n(y)| d\mathcal{L}^N(y) &\leq \int_{\Omega_n} \left[\frac{n^N}{\|\rho\|_1} \int_{\Omega} \rho(n|x-y|) |u(x)| d\mathcal{L}^N(x) \right] d\mathcal{L}^N(y) \\ &\leq \int_{\Omega} |u(x)| d\mathcal{L}^N(x) < +\infty \end{aligned}$$

per il teorema di Fubini, usando il fatto che

$$\frac{n^N}{\|\rho\|_1} \int_{\Omega} \rho(n|x-y|) d\mathcal{L}^N(y) = 1.$$

e ricordando l'ipotesi $u \in L^1(\Omega)$.

Quindi (u_n) è uniformemente limitata in L^1 .

In quanto armoniche le u_n soddisfano la proprietà di uguaglianza del valor medio.

Inoltre, poich\'e (u_n) è limitata in L^1 , da

$$u_n(x^0) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x^0)} u_n(x) d\mathcal{L}^N(x)$$

segue che $u_n(x^0)$ è limitata per R fissato tale che $B_R(x^0) \subset \Omega_n$. Pertanto le u_n sono uniformemente limitate in Ω_{n_0} per $n \geq 2n_0$. Inoltre, dalla proprietà di uguaglianza del valor medio segue direttamente che, se $B_R(x'), B_R(x'') \subset \Omega_{n_0}$, si ha

$$\begin{aligned} |u_n(x') - u_n(x'')| &\leq c(R) \int_{\{B_R(x') \setminus B_R(x'')\} \cup \{B_R(x'') \setminus B_R(x')\}} |u_n(x)| d\mathcal{L}^N(x) \\ &\leq c'(R) |x' - x''|. \end{aligned}$$

Quindi (∇u_n) è uniformemente limitata in Ω_{n_0} e, analogamente, tutte le derivate di ogni ordine delle u_n , in quanto armoniche, sono uniformemente limitate in Ω_{n_0} (basta ripetere lo stesso procedimento usato per le u_n). Pertanto, per $n \rightarrow +\infty$, un'estratta di (u_n) converge uniformemente, con le sue derivate, ad una funzione $v \in C^\infty(\Omega)$. E, in quanto limite uniforme di funzioni armoniche per il Teorema 2.9.1 anche v è armonica. Ma u_n converge a u in $L^1(\Omega)$, perciò $u = v$ q.o., cioè $u \in C^\infty(\Omega)$ ed è armonica in Ω . \square

Osservazione. Nella dimostrazione abbiamo usato il fatto che Δ commuta con le regolarizzanti, in altri termini che l'operatore di Laplace è invariante per rotazioni (è questa la ragione per cui scegliamo ρ radiale). Proprio per questo, però, la dimostrazione precedente non può essere estesa ad altri problemi variazionali.

(iii) Per il lemma di Caccioppoli-Weyl la soluzione debole $u_0 \in \mathcal{A}_\varphi$ del Principio di Dirichlet è armonica in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Proviamo ora un risultato di maggiore regolarità interna: tale u_0 è di classe $C^\omega(\Omega)$, cioè è analitica reale.

Per questo premettiamo il seguente risultato che estende alle derivate D^α il Teorema 2.12.1.

Lemma 8.5.3. *Sia $u \in C^2(\Omega)$ armonica e limitata in Ω . Allora*

$$\forall x^0 \in \Omega, \quad \forall B_R(x^0) \subset \Omega \quad e \quad \forall \alpha \text{ multi-indice di lunghezza } |\alpha| :$$

$$|D^\alpha u(x^0)| \leq \left(\frac{Ne}{R} \right)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{e} M, \quad (8.4)$$

dove $M = \sup_\Omega |u|$.

Dimostrazione. Proviamo il teorema per induzione su $|\alpha|$. Per $|\alpha| = 1$ è dimostrato nel Teorema 2.12.1. Sia (8.4) vera per ogni multi-indice di lunghezza $|\alpha|$, proviamo che essa continua a valere per tutti i multi-indice β di lunghezza $|\beta| = |\alpha| + 1$. Per tale β si ha che

$$D^\beta u = \frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha u \quad \text{per un certo } 1 \leq i \leq N.$$

Poiché $D^\beta u$ è armonica in Ω (in quanto derivata di una funzione armonica), fissato $\tau \in (0, 1)$, $D^\beta u$ è armonica nella palla $B_{\tau R}(x^0)$; quindi, per la proprietà di uguaglianza del valor medio e il teorema della divergenza, si ha

$$D^\beta u(x^0) = \frac{1}{\omega_N \tau^N R^N} \int_{\partial B_{\tau R}(x^0)} D^\alpha u(\xi) \frac{(\xi - x^0)_i}{|\xi - x^0|} d\mathcal{H}^{N-1}(\xi).$$

Per (8.4) applicata alla palla aperta di centro $\xi \in \partial B_{\tau R}(x^0)$ e raggio $(1 - \tau)R$

$$|D^\alpha u(\xi)| \leq \left(\frac{Ne}{(1 - \tau)R} \right)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{e} M.$$

Quindi

$$|D^\beta u(x^0)| \leq \left(\frac{Ne}{R} \right)^{|\alpha|+1} \frac{1}{(1 - \tau)^{|\alpha|} \tau} \frac{|\alpha|!}{e^2} M.$$

Scelto

$$\tau = \frac{1}{|\alpha| + 1} = \frac{1}{|\beta|}$$

si ha

$$(1 - \tau)^{-|\alpha|} = \left(1 - \frac{1}{|\beta|} \right)^{-|\beta|+1} \leq \left(1 - \frac{1}{|\beta|} \right)^{-|\beta|} \leq e$$

e quindi la tesi. \square

Teorema 8.5.4. *Sia u armonica e limitata in Ω . Allora u è analitica in Ω .*

Dimostrazione. Fissato $x^0 \in \Omega$, consideriamo $R > 0$ t.c.

$$(N e^{2N+1} + 1) R < \min \{ d(x^0, \partial\Omega); 1 \}.$$

Lo sviluppo di Taylor di u di centro x^0 in $B_R(x^0)$ è

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \forall x \in B_R(x^0)$$

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{D^\alpha u(x^0)}{\alpha!} (x - x^0)^\alpha + \sum_{|\beta|=n+1} \frac{D^\beta u(y)}{\beta!} (y - x^0)^\beta, \quad (8.5)$$

dove

$$(x - x^0)^\alpha = \prod_{i=1}^N (x_i - x_i^0)^{\alpha_i}, \quad \alpha! = \prod_{i=1}^N \alpha_i! \quad \text{e} \quad y \in B_R(x^0).$$

Applicando (8.4) alla palla di centro y e raggio $N e^{2N+1} R$ e la disuguaglianza²⁸

$$|\beta|! \leq e^{N|\beta|} \beta!,$$

²⁸Sia β un multi-indice N -dimensionale di lunghezza $|\beta|$. Vale

$$|\beta|! \leq e^{N|\beta|} \beta!.$$

Dimostrazione. Siano $x_i \in \mathbb{R}$, per $i = 1, 2, \dots, N$ e sia $k \in \mathbb{N}$. Se β denota un multi-indice N -dimensionale di lunghezza k , dalla versione di Leibniz delle formula di Newton, si ha

$$\left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^k = \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!} \prod_{i=1}^N x_i^{\beta_i}.$$

Considerando $x_i = 1$ per ogni $i = 1, 2, \dots, N$, si ottiene

$$N^{|\beta|} = \sum_{|\beta|=k} \frac{|\beta|!}{\beta!} \implies \frac{|\beta|!}{\beta!} \leq \sum_{|\beta|=k} \frac{|\beta|!}{\beta!} = N^{|\beta|} \implies |\beta|! \leq N^{|\beta|} \beta! \leq e^{N|\beta|} \beta!.$$

\square

si ha

$$\frac{|D^\beta u(y)|}{\beta!} |(y - x^0)^\beta| \leq e^{N|\beta|} \left(\frac{Ne}{Ne^{2N+1}R} \right)^{|\beta|} R^{|\beta|} \sup_{\Omega} |u| = e^{-N|\beta|} \sup_{\Omega} |u|.$$

Poiché $\sup_{\Omega} |u| = M$, si ha

$$\left| \sum_{|\beta|=n+1} \frac{D^\beta u(y)}{\beta!} (x - x^0)^\beta \right| \leq M \sum_{|\beta|=n+1} e^{-N|\beta|} \leq M |\beta|^N e^{-N|\beta|}.$$

Per $|\beta| \rightarrow +\infty$ segue la tesi. \square

In virtù di questo risultato la soluzione debole $u_0 \in \mathcal{A}_\varphi$ del Principio di Dirichlet è analitica in Ω (regolarità interna). Resta così completamente dimostrato il Principio di Dirichlet in $W^{1,2}(\Omega)$, Teorema 8.5.1. \square

Osservazione 8.5.5. Per quanto concerne la condizione al contorno, questa è stata acquisita nella forma implicita: $u_0 - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Si può tuttavia dimostrare che sotto opportune ipotesi di regolarità per Ω e φ si ha $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ e $u_0 = \varphi$ su $\partial\Omega$ (regolarità fino alla frontiera) (cfr. [1]).

CAPITOLO 9

Metodo variazionale per operatori in forma di divergenza: teoria L^2

9.1 Il metodo variazionale per operatori in forma di divergenza: una introduzione

Il metodo variazionale può essere sintetizzato nel modo seguente:

- (i) si definisce una soluzione debole attraverso l'introduzione di forme quadratiche;
- (ii) se ne dimostra esistenza e unicità tramite il teorema di Riesz-Fréchet 6.3.1, il lemma di Lax-Milgram 6.4.3 e il Teorema di Stampacchia 6.4.2;
- (iii) si regolarizza la soluzione debole ottenuta (tramite risultati di regolarità superiore si perviene ad una soluzione classica del problema).

9.2 Problema di Dirichlet omogeneo per l'equazione di Poisson

Illustriamo ora il metodo variazionale prendendo in considerazione come “modello” il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson con dato omogeneo

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \quad (P)$$

con $f \in L^2(\Omega)$ e Ω aperto connesso limitato di \mathbb{R}^N .

Definizione 9.2.1. Si definisce soluzione debole del problema (P) una funzione $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \quad \left(\text{oppure } \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega) \right).$$

Esistenza (unicità e dipendenza continua) della soluzione debole.

Applicando il teorema di Riesz-Fréchet 6.3.1, con

$$H = W_0^{1,2}(\Omega)$$

e

$$\phi : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega) \mapsto \phi(v) = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) d\mathcal{L}^N(x) < +\infty$$

$\left(\phi \text{ è ovviamente lineare, e continuo in quanto} \right.$

$$\left. |\phi(v)| \leq \|f\|_2 \cdot \|v\|_2 \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega) \right)$$

si ha che

$$\begin{aligned} \exists u_f \in W_0^{1,2}(\Omega) : \quad \phi(v) &= \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) d\mathcal{L}^N(x) = (u_f|v)_{1,2} \\ &= \int_{\Omega} \nabla u_f(x) \cdot \nabla v(x) d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega). \end{aligned}$$

Inoltre si ha

$$\|u_f\|_{1,2} = \sup_{\substack{v \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{|\phi(v)|}{\|v\|_{1,2}} \leq \|f\|_2,$$

cioè la soluzione debole u_f del problema (P) dipende con continuità dal dato f .

Per il lemma di Lax-Milgram 6.4.3, $u_f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ è caratterizzata dalla proprietà

$$\frac{1}{2} (\nabla u_f | \nabla u_f)_2 - \phi(u_f) = \min_{v \in W_0^{1,2}(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla v | \nabla v)_2 - \phi(v) \right\},$$

cioè

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_f|^2 d\mathcal{L}^N - \int_{\Omega} f u_f d\mathcal{L}^N = \min_{v \in W_0^{1,2}(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\mathcal{L}^N - \int_{\Omega} f v d\mathcal{L}^N \right\}.$$

Osservazione 9.2.2. La soluzione del problema dell'esistenza in spazi di Sobolev apre un'altra questione. Le funzioni di questi spazi infatti sono derivabili in senso debole, e in generale non sono nemmeno continue. Una volta ottenuta una soluzione debole, sorge allora il problema di dimostrare che si tratta di una funzione sufficientemente regolare; in breve, rimane da affrontare il problema della regolarità delle soluzioni deboli.

Regolarità della soluzione debole.

Se Ω è di classe C^2 , $f \in L^2(\Omega)$ allora $u_f \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$. Più in generale, se Ω è di classe C^{2+k} , $f \in W^{k,2}(\Omega)$ allora $u_f \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2+k,2}(\Omega)$ ²⁹ (informalmente possiamo dire che u_f ha due derivate in più in $L^2(\Omega)$ rispetto al numero di derivate che la densità f ha in $L^2(\Omega)$).

In particolare (per il teorema di immersione di Morrey) se $k > \frac{N}{2}$, allora $u_f \in C^2(\overline{\Omega})$; in questa ipotesi si riconosce facilmente che u_f è soluzione classica (forte) di (P) , tenendo anche presente che, essendo $u_f \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, risulta $u_f = 0$ su $\partial\Omega$.

9.3 Operatori in forma di divergenza

Sia, più in generale,

$$Au = \sum_{i,j=1}^N \partial_j (a_{ij} \partial_i u) + \sum_{i=1}^N b_i \partial_i u + c u$$

con $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $b_i, c \in C^0(\overline{\Omega})$, e consideriamo il problema di Dirichlet associato

$$\begin{cases} -Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_0)$$

con $f \in L^2(\Omega)$ e Ω aperto connesso limitato di \mathbb{R}^N .

Definizione 9.3.1. A si dice uniformemente ellittico in Ω se e solo se

$$\exists \nu_0 > 0 : \quad \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \forall x \in \Omega.$$

Definizione 9.3.2. Si definisce soluzione debole del problema di Dirichlet (P_0) una funzione $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \partial_i u \partial_j v - \sum_{i=1}^N b_i \partial_i u v - c u v \right) d\mathcal{L}^N = \int_{\Omega} f v d\mathcal{L}^N \quad \forall v \in C_0^1(\Omega)$$

(oppure, equivalentemente per densità, $\forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)$).

²⁹ $W^{m,p}(\Omega)$ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$) indica lo spazio delle funzioni di $L^p(\Omega)$ aventi derivate deboli, fino all'ordine m incluso, in $L^p(\Omega)$.

Sia Ω un aperto connesso e limitato di \mathbb{R}^N , di classe C^1 ; se $kp > N$ si ha $W^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega})$.

Introduciamo sullo spazio di Hilbert $W_0^{1,2}(\Omega)$ il funzionale bilineare

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \partial_i u \partial_j v - \sum_{i=1}^N b_i \partial_i u v - c u v \right) d\mathcal{L}^N.$$

Allora u è soluzione debole del problema (P_0) se e solo se

$$\forall v \in W_0^{1,2}(\Omega) : \quad a(u, v) = (f|v)_2$$

Lemma 9.3.3.

$$(i) \text{ Posto } \lambda_0 = \frac{k^2}{2\nu_0} + \sup_{x \in \Omega} c(x) + \frac{\nu_0}{2}, \text{ dove } k = \sup_{x \in \Omega} \left(\sum_{i=1}^N |b_i(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

risulta

$$a(u, u) \geq \frac{\nu_0}{2} \|u\|_{1,2}^2 - \lambda_0 \|u\|_2^2 \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

$(a(\cdot, \cdot))$ è debolmente coercitiva in $L^2(\Omega)$;

(ii) esiste $\alpha > 0$ tale che

$$|a(u, v)| \leq \alpha \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2} \quad \forall u, v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Dimostrazione. Proviamo (i). Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^N b_i(x) \partial_i u(x) \right| &\leq \left(\sum_{i=1}^N |b_i(x)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^N |\partial_i u(x)|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^N |b_i(x)|^2 \right)^{1/2} |\nabla u(x)| \end{aligned}$$

e quindi, posto $k = \sup_{x \in \Omega} \left(\sum_{i=1}^N |b_i(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, risulta

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N b_i(x) \partial_i u(x) u(x) d\mathcal{L}^N(x) \right| &\leq \int_{\Omega} k |\nabla u(x)| |u(x)| d\mathcal{L}^N(x) \\ &= \int_{\Omega} k \sqrt{\varepsilon} |\nabla u(x)| \frac{|u(x)|}{\sqrt{\varepsilon}} d\mathcal{L}^N(x) \\ &\leq \frac{k^2 \varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 d\mathcal{L}^N(x) + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |u(x)|^2 d\mathcal{L}^N(x) \end{aligned}$$

(avendo usato la disuguaglianza $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$).

Prendendo $\epsilon = \frac{\nu_0}{k^2}$, si ha

$$\left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N b_i(x) \partial_i u(x) u(x) d\mathcal{L}^N(x) \right| \leq \frac{\nu_0}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 d\mathcal{L}^N(x) + \frac{k^2}{2\nu_0} \int_{\Omega} |u(x)|^2 d\mathcal{L}^N(x).$$

Pertanto, per ogni $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, vale

$$\begin{aligned} a(u, u) &\geq \nu_0 \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 d\mathcal{L}^N(x) - \frac{\nu_0}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 d\mathcal{L}^N(x) \\ &\quad - \frac{k^2}{2\nu_0} \int_{\Omega} |u(x)|^2 d\mathcal{L}^N(x) - \sup_{x \in \Omega} c(x) \cdot \int_{\Omega} |u(x)|^2 d\mathcal{L}^N(x). \end{aligned}$$

Ponendo $\lambda_0 = \frac{k^2}{2\nu_0} + \sup_{x \in \Omega} c(x) + \frac{\nu_0}{2}$, si ha

$$a(u, u) \geq \frac{\nu_0}{2} \|u\|_{1,2}^2 - \lambda_0 \|u\|_2^2,$$

il che dimostra che $a(\cdot, \cdot)$ è debolmente coercitiva.

Proviamo (ii). Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\left| \sum_{i=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^N |a_{ij}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^N |a_{ij}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\xi|$$

e quindi

$$\left| \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \right| \leq \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N |a_{ij}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\xi| |\xi_j| \leq \left(\sum_{i,j=1}^N |a_{ij}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\xi|^2.$$

Posto $L = \sup_{x \in \Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N |a_{ij}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ si ha

$$\left| \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \right| \leq L |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall x \in \Omega.$$

Usando la precedente disuguaglianza e la disuguaglianza di Hölder 4.2.3 si prova che $a(\cdot, \cdot)$ è anche continua. Infatti, se $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$|a(u, v)| \leq L \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + k \|\nabla u\|_2 \|v\|_2 + \|c\|_{\infty} \|u\|_2 \|v\|_2 \leq \alpha \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2}. \quad \square$$

Teorema 9.3.4. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \geq \lambda_0$ e per ogni $f \in L^2(\Omega)$

$$\exists u = u_f \in W_0^{1,2}(\Omega) : \quad \lambda (u|v)_2 + a(u, v) = (f|v)_2 \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

(cioè u è soluzione debole del problema

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}.$$

Inoltre, se $\lambda > \lambda_0$ si ha

$$\|u\|_2 \leq \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \|f\|_2, \quad \|\nabla u\|_2 \leq \sqrt{\frac{2}{\nu_0(\lambda - \lambda_0)}} \|f\|_2.$$

Dimostrazione. Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \geq \lambda_0$ e $f \in L^2(\Omega)$.

Consideriamo su $W_0^{1,2}(\Omega)$ il funzionale bilineare

$$\tilde{a}(u, v) = a(u, v) + \lambda (u|v)_2.$$

Siccome $a(\cdot, \cdot)$ è continua, anche $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ lo è. Inoltre

$$\begin{aligned} \tilde{a}(u, u) &= a(u, u) + \lambda (u|u)_2 = a(u, u) + \lambda \|u\|_2^2 \\ &\geq \frac{\nu_0}{2} \|u\|_{1,2}^2 + (\lambda - \lambda_0) \|u\|_2^2 \geq \frac{\nu_0}{2} \|u\|_{1,2}^2, \end{aligned} \quad (9.1)$$

cioè $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ è coercitiva su $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Per il lemma di Lax-Milgram 6.4.3 esiste un'unica $u_f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che

$$\lambda (u|v)_2 + a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, d\mathcal{L}^N \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Prendendo $v = u$ nell'uguaglianza precedente e usando (9.1) risulta

$$\|f\|_2 \|u\|_2 \geq \int_{\Omega} f u \, d\mathcal{L}^N = \lambda \|u\|_2^2 + a(u, u) \geq \frac{\nu_0}{2} \|u\|_{1,2}^2 + (\lambda - \lambda_0) \|u\|_2^2$$

da cui segue

$$(\lambda - \lambda_0) \|u\|_2^2 \leq \|f\|_2 \|u\|_2, \quad \frac{\nu_0}{2} \|u\|_{1,2}^2 \leq \|f\|_2 \|u\|_2.$$

Quindi, per $\lambda > \lambda_0$, si ha

$$\|u\|_2 \leq \frac{\|f\|_2}{\lambda - \lambda_0}$$

e dunque

$$\frac{\nu_0}{2} \|\nabla u\|_2^2 \leq \frac{\nu_0}{2} \|u\|_{1,2}^2 \leq \|f\|_2 \|u\|_2 \leq \frac{\|f\|_2^2}{\lambda - \lambda_0}. \quad \square$$

Osservazione 9.3.5. Per il problema

$$\begin{cases} \lambda u - Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_\lambda)$$

abbiamo provato (vedi teorema 9.3.4) che se $\lambda \geq \lambda_0$ ed $f \in L^2(\Omega)$, allora esiste un'unica soluzione di (P_λ) in $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Si può dimostrare, con un confronto con i risultati che si provano per lo stesso problema negli spazi di Hölder, che il problema (P_λ) è risolubile per ogni $\lambda \geq 0$.

9.4 Problema di Dirichlet non-omogeneo per l'equazione di Poisson

Teorema 9.4.1. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto connesso e limitato, $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$; il problema con dato di Dirichlet non-omogeneo

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_\varphi)$$

ha un'unica soluzione (debole) u in $\mathcal{A}_\varphi = \{v \in W^{1,2}(\Omega); v - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)\}$; tale soluzione è caratterizzata da

$$\begin{cases} u \in \mathcal{A}_\varphi \\ u \text{ minimizza in } \mathcal{A}_\varphi \text{ il funzionale} \\ \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 d\mathcal{L}^N - \int_\Omega f v d\mathcal{L}^N. \end{cases}$$

Dimostrazione. Osserviamo che \mathcal{A}_φ è un convesso chiuso non vuoto di $W^{1,2}(\Omega)$.

Osserviamo anche che sono equivalenti:

(a) $u \in \mathcal{A}_\varphi$ è soluzione debole di (P_φ) , cioè

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \zeta d\mathcal{L}^N = \int_\Omega f \zeta d\mathcal{L}^N \quad \forall \zeta \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

(b) $u \in \mathcal{A}_\varphi$ e

$$\int_\Omega \nabla u \cdot (\nabla v - \nabla u) d\mathcal{L}^N \geq \int_\Omega f (v - u) d\mathcal{L}^N \quad \forall v \in \mathcal{A}_\varphi.$$

Infatti:

(a) \Rightarrow (b): Poiché da $v \in \mathcal{A}_\varphi$ e $u \in \mathcal{A}_\varphi$ risulta $v - u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, dall'ipotesi segue

$$\int_\Omega \nabla u \cdot (\nabla v - \nabla u) d\mathcal{L}^N = \int_\Omega f (v - u) d\mathcal{L}^N \quad \forall v \in \mathcal{A}_\varphi.$$

(b) \Rightarrow (a): Se $u \in \mathcal{A}_\varphi$ verifica la disuguaglianza, scegliamo $v = u \pm \zeta$ con (arbitrario) $\zeta \in W_0^{1,2}(\Omega)$: sicché risulta $v \in \mathcal{A}_\varphi$ e si ha la tesi.

A questo punto basta applicare il teorema di Stampacchia 6.4.2 con

$$\phi(v) = \int_{\Omega} f v \, d\mathcal{L}^N \quad \text{e} \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, d\mathcal{L}^N. \quad \square$$

Osservazione 9.4.2. Lo studio della regolarità e il ritorno ad una soluzione classica si effettua come indicato nell'Osservazione 9.2.2

CAPITOLO 10

La trasformata di Fourier

10.1 La trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^N)$

Daremo ora una introduzione alla teoria della trasformata di Fourier, enunciando le sue principali proprietà. Tale trasformata, introdotta dal matematico francese Joseph Fourier (1768-1830), ha consentito di risolvere numerose equazioni differenziali della fisica matematica ed è utilizzata nella teoria dei segnali continui. La sua versione discreta, cioè per successioni invece che per funzioni, è stata particolarmente utilizzata dopo l'introduzione, negli anni '60, della Trasformata di Fourier Rapida (FFT).

Definizione 10.1.1. Sia $u \in L^1(\mathbb{R}_x^N)$ (u funzione reale o complessa); la sua trasformata di Fourier $\hat{u} : \mathbb{R}_\xi^N \rightarrow \mathbb{C}$ è la funzione limitata su \mathbb{R}_ξ^N definita da

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}_x^N} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(x) d\mathcal{L}^N(x);$$

chiaramente $\hat{u}(\xi)$ è ben definita per ogni ξ e per la disuguaglianza di Hölder si ha $\|\hat{u}\|_\infty \leq \|u\|_1$.

Il moltiplicatore $e^{-2\pi i x \cdot \xi}$ si chiama *carattere*.

Osservazione 10.1.2. La trasformata di Fourier

$$\hat{\cdot} : L^1(\mathbb{R}_x^N) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}_\xi^N)$$

è lineare e continua (anzi Lipschitziana).

Nel seguito indicheremo la trasformata di Fourier di u anche con il simbolo $\mathcal{F}u$.

Osservazione 10.1.3. In generale, assumendo $u \in L^1(\mathbb{R}_x^N)$ o $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^N)$, non è vero che $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}_\xi^N)$.

Infatti, sia $N = 1$ e $u(x) = \chi_{[-1,1]}$ (la funzione caratteristica di $[-1, 1]$); allora

$$\hat{u}(\xi) = \begin{cases} 2 \frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi} & \text{per } \xi \neq 0 \\ 2 & \text{per } \xi = 0. \end{cases}$$

Evidentemente \hat{u} è limitata, continua in \mathbb{R} ed è infinitesima all'infinito (queste proprietà, come vedremo, valgono per le trasformate di Fourier di tutte le funzioni sommabili).

Osserviamo che, invece, la trasformata di Fourier $\hat{u} \notin L^1(\mathbb{R}_\xi)$.

Osservazione 10.1.4. Nel caso $N = 1$, tenendo presente che l'integrale su \mathbb{R} di una funzione dispari è nullo, si ottengono le seguenti proprietà:

- (i) Se $u \in L^1(\mathbb{R}_x)$ è pari, allora \hat{u} è pari;
- (ii) Se $u \in L^1(\mathbb{R}_x)$ è dispari, allora \hat{u} è dispari;
- (iii) Se $u \in L^1(\mathbb{R}_x)$ è reale e pari, allora \hat{u} è reale e pari;
- (iv) Se $u \in L^1(\mathbb{R}_x)$ è reale e dispari, allora \hat{u} è immaginaria pura e dispari.

Proposizione 10.1.5. Se $u, v \in L^1(\mathbb{R}_x^N)$ allora $(u * v)^\wedge = \hat{u} \hat{v}$ (\mathcal{F} stabilisce un omomorfismo tra $L^1(\mathbb{R}_x^N)$ munito del prodotto di convoluzione $*$ e $L^\infty(\mathbb{R}_\xi^N)$ munito del prodotto puntuale).

Dimostrazione. Si tratta di un'applicazione del teorema di Fubini:

$$\begin{aligned} (u * v)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}_x^N} e^{-2\pi i x \cdot \xi} (u * v)(x) d\mathcal{L}^N(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}_x^N} \left(\int_{\mathbb{R}_y^N} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(x - y) v(y) d\mathcal{L}^N(y) \right) d\mathcal{L}^N(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}_x^N} \left(\int_{\mathbb{R}_y^N} e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} u(x - y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} v(y) d\mathcal{L}^N(y) \right) d\mathcal{L}^N(x) \\ &= \hat{u}(\xi) \int_{\mathbb{R}_y^N} e^{-2\pi i y \cdot \xi} v(y) d\mathcal{L}^N(y) = \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi). \end{aligned}$$

□

10.2 La classe di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (delle funzioni a decrescenza rapida all'infinito)

Il modo più semplice di sviluppare le altre proprietà basilari della trasformata di Fourier è di considerare la sua restrizione alla classe (densa in $L^1(\mathbb{R}^N)$) di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Proveremo che se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (ampliamento di $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$) allora $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Definizione 10.2.1.

$$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \iff u \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \wedge \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\beta u(x)| < +\infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N.$$

(u e tutte le sue derivate decrescono all'infinito più rapidamente di qualsiasi potenza di $|x|$)

Osservazione 10.2.2.

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

inoltre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è un sottospazio denso di $L^1(\mathbb{R}^N)$ (e di $L^2(\mathbb{R}^N)$).

La funzione

$$u(x) = e^{-|x|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^N)$$

è tale che

$$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \setminus C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Proposizione 10.2.3. Se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$, allora $\widehat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}_\xi^N)$ e

$$D_\xi^\beta \widehat{u}(\xi) = \widehat{v}(\xi) \quad \forall \beta \in \mathbb{N}_0^N, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

dove $v(x) = (-2\pi i x)^\beta u(x)$.

Dimostrazione.

$$D_\xi^\beta \widehat{u}(\xi) = D_\xi^\beta \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(x) d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\mathbb{R}^N} (-2\pi i x)^\beta e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(x) d\mathcal{L}^N(x) = \widehat{v}(\xi)$$

dove

$$v(x) = (-2\pi i x)^\beta u(x).$$

□

Proposizione 10.2.4. Se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$, allora

$$(D_x^\beta u)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\beta \widehat{u}(\xi) \quad \forall \beta \in \mathbb{N}_0^N, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Dimostrazione. Si integra per parti $(D_x^\beta u)^\wedge(\xi)$ e si osserva che “i termini di frontiera” si annullano poiché u e le sue derivate appartengono a $\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$. □

Osservazione 10.2.5. Questa proprietà consente di trasformare problemi differenziali in problemi algebrici.

Proposizione 10.2.6. Se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$, allora $\widehat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^N)$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 10.2.3 $\widehat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}_\xi^N)$, sicché resta da provare che

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} |\xi^\alpha D_\xi^\beta \widehat{u}(\xi)| < +\infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N.$$

Per la Proposizione 10.2.4

$$\xi^\alpha \widehat{u}(\xi) = \frac{(2\pi i \xi)^\alpha \widehat{u}(\xi)}{(2\pi i)^{|\alpha|}} = \frac{(D_x^\alpha u)^\sim(\xi)}{(2\pi i)^{|\alpha|}}$$

e per la Proposizione 10.2.3

$$D_\xi^\beta (\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)) = \frac{D_\xi^\beta (D_x^\alpha u)^\sim(\xi)}{(2\pi i)^{|\alpha|}} = \widehat{v}(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

dove $v(x) = (-1)^{|\beta|} (2\pi i)^{|\beta| - |\alpha|} x^\beta D_x^\alpha u(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, sicché $D_\xi^\beta (\xi^\alpha \widehat{u}(\xi))$ è limitata per ogni α e β .

Ricordato che, per la regola di Leibniz, $D_\xi^\beta (\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)) = \sum_{0 \leq |\gamma| \leq |\beta|} \binom{\beta}{\gamma} D_\xi^\gamma \xi^\alpha \cdot D_\xi^{\beta-\gamma} \widehat{u}(\xi)$

segue che $\xi^\alpha D_\xi^\beta \widehat{u}(\xi)$ è limitata per ogni α e β . \square

Lemma 10.2.7. (*Lemma di Riemann-Lebesgue*)

Se $u \in L^1(\mathbb{R}_x^N)$ allora $\widehat{u} \in C^0(\mathbb{R}_\xi^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}_\xi^N)$ e

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \widehat{u}(\xi) = 0.$$

Dimostrazione. Il lemma è vero se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$. Se $u \in L^1(\mathbb{R}_x^N)$, poiché $\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$ è un sottospazio denso di $L^1(\mathbb{R}_x^N)$, esiste $(u_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$ tale che $u_j \rightarrow u$ in $L^1(\mathbb{R}_x^N)$. Allora $\widehat{u}_j \rightarrow \widehat{u}$ (poiché $\|\widehat{u}_j - \widehat{u}\|_\infty = \|\widehat{u_j - u}\|_\infty \leq \|u_j - u\|_1$) e la tesi segue immediatamente. \square

Esempio 10.2.8. (*La trasformata della funzione gaussiana*)

Sia $u_a(x) = e^{-\pi a |x|^2}$, dove $a > 0$. Allora

$$\widehat{u}_a(\xi) = a^{-\frac{N}{2}} e^{-\pi \frac{|\xi|^2}{a}}.$$

Dimostrazione. Introdotto il cambiamento di variabili

$$x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{a}}$$

possiamo assumere $a = 1$. Per il teorema di Fubini abbiamo (indicato per semplicità $u_1(x) = e^{-\pi |x|^2}$ con $u(x)$)

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i x \cdot \xi - \pi |x|^2} d\mathcal{L}^N(x) = \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi i x_j \xi_j - \pi x_j^2) d\mathcal{L}^1(x_j),$$

ed è quindi sufficiente provare che il j -esimo fattore nel prodotto è uguale a $\exp(-\pi \xi_j^2)$; pertanto basta considerare il caso $N = 1$.

Premessa: $\forall N \geq 1 : \quad I_N = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi |x|^2} d\mathcal{L}^N(x) = 1;$

infatti, osservato che

$$\exp(-\pi|x|^2) = \exp\left(-\pi \sum_{j=1}^N x_j^2\right) = \prod_{j=1}^N \exp(-\pi x_j^2),$$

si ha, per il teorema di Fubini, $I_N = (I_1)^N$ e quindi, essendo $I_2 = (I_1)^2$ risulta $I_N = (I_2)^{\frac{N}{2}}$.

È allora sufficiente provare che $I_2 = 1$. Introdotte in \mathbb{R}^2 le coordinate polari (r, ϑ) si ha:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi|x|^2} d\mathcal{L}^2(x) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2} r d\mathcal{L}^1(r) \right) d\mathcal{L}^1(\theta) \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2} r d\mathcal{L}^1(r) = 1. \end{aligned}$$

La premessa è dunque provata.

Torniamo alla prova dell'esercizio.

Quando $N = 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} \cdot e^{-\pi x^2} d\mathcal{L}^1(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} \cos(2\pi x \xi) d\mathcal{L}^1(x) - i \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} \sin(2\pi x \xi) d\mathcal{L}^1(x). \end{aligned}$$

Osservato che

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} \sin(2\pi x \xi) d\mathcal{L}^1(x) = 0$$

perché l'integrando è una funzione dispari della variabile x e l'integrale è esteso tra $-\infty$ e $+\infty$, risulta

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} \cos(2\pi x \xi) d\mathcal{L}^1(x).$$

Da ciò segue, derivando rispetto a ξ ,

$$\hat{u}'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (-2\pi x) e^{-\pi x^2} \sin(2\pi x \xi) d\mathcal{L}^1(x)$$

e integrando per parti

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (-2\pi x) e^{-\pi x^2} \sin(2\pi x \xi) d\mathcal{L}^1(x) &= \\ &= \left[e^{-\pi x^2} \sin(2\pi x \xi) \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} - 2\pi \xi \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} \cos(2\pi x \xi) d\mathcal{L}^1(x) = -2\pi \xi \hat{u}(\xi). \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\frac{\hat{u}'(\xi)}{\hat{u}(\xi)} = -2\pi \xi$$

da cui

$$\log |\hat{u}(\xi)| = -\pi \xi^2 + c$$

e quindi

$$\widehat{u}(\xi) = c' e^{-\pi \xi^2}.$$

Inoltre, tenuto conto di quanto provato nella premessa, si ha

$$\widehat{u}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} d\mathcal{L}^1(x) = 1 = c'$$

e pertanto

$$\widehat{u}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}.$$

□

Proposizione 10.2.9. Se $u, v \in L^1(\mathbb{R}^N)$, allora vale la formula

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \widehat{v}(x) d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(y) v(y) d\mathcal{L}^N(y).$$

Dimostrazione. Per il teorema di Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \widehat{v}(x) d\mathcal{L}^N(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \left(\int_{\mathbb{R}^N} v(y) e^{-2\pi i y \cdot x} d\mathcal{L}^N(y) \right) d\mathcal{L}^N(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(y) v(y) d\mathcal{L}^N(y). \end{aligned}$$

□

Definizione 10.2.10. Per $u \in L^1(\mathbb{R}_x^N)$, definiamo in \mathbb{R}^N la funzione u^\vee ponendo per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$u^\vee(x) := \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x \cdot \xi} u(\xi) d\mathcal{L}^N(\xi) = \widehat{u}(-x).$$

Sussiste il seguente

Teorema 10.2.11. (*Teorema di inversione della trasformata di Fourier in $\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$*)
Se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$ allora $(\widehat{u})^\vee = u = (u^\vee)^\wedge$, cioè per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ u si può rappresentare nel seguente modo

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{u}(\xi) d\mathcal{L}^N(\xi).$$

Pertanto $^\vee$ è l'inversa di $^\wedge$ (nel seguito indicheremo anche con \mathcal{F}^{-1} l'inversa di \mathcal{F}).

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ e poniamo, per ogni fissato $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\Phi_\varepsilon(\xi) = e^{2\pi i x \cdot \xi - \pi \varepsilon^2 |\xi|^2} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Si ha, per la Proposizione 10.2.9,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x \cdot \xi - \pi \varepsilon^2 |\xi|^2} \widehat{u}(\xi) d\mathcal{L}^N(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_\varepsilon(\xi) \widehat{u}(\xi) d\mathcal{L}^N(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\Phi}_\varepsilon(y) u(y) d\mathcal{L}^N(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x - y) u(y) d\mathcal{L}^N(y) = (\varphi_\varepsilon * u)(x) \end{aligned}$$

essendo

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_\varepsilon(y) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i \xi \cdot y} e^{-\pi \varepsilon^2 |\xi|^2} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\mathcal{L}^N(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i (y-x) \cdot \xi} e^{-\pi \varepsilon^2 |\xi|^2} d\mathcal{L}^N(\xi) = \varepsilon^{-N} e^{-\pi \frac{|y-x|^2}{\varepsilon^2}} \quad (\text{cfr. Esempio 10.2.8}) \end{aligned}$$

e

$$\varphi_\varepsilon(z) := \varepsilon^{-N} e^{-\pi \frac{|z|^2}{\varepsilon^2}}.$$

Per il teorema di approssimazione dell'identità (essendo u continua e limitata in \mathbb{R}^N), osservato che $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(z) d\mathcal{L}^N(z) = 1$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^N \quad (\varphi_\varepsilon * u)(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(x).$$

D'altra parte, per il teorema della convergenza dominata, essendo

$$\widehat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^N) \subset L^1(\mathbb{R}_\xi^N),$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x \cdot \xi - \pi \varepsilon^2 |\xi|^2} \widehat{u}(\xi) d\mathcal{L}^N(\xi) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{u}(\xi) d\mathcal{L}^N(\xi) = (\widehat{u})^\vee(x).$$

□

Osservazione 10.2.12. Il teorema di inversione di Fourier vale più in generale per le $u \in L^1(\mathbb{R}_x^N)$ che siano anche di classe $L^\infty(\mathbb{R}_x^N) \cap C^0(\mathbb{R}_x^N)$ con $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}_\xi^N)$.

Teorema 10.2.13. (Formula di Parseval)

Siano $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$, allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \overline{v}(x) d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}}(\xi) d\mathcal{L}^N(\xi),$$

(dove \overline{v} indica la funzione complessa coniugata di v).

Dimostrazione. Per il teorema di inversione di Fourier

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \overline{v}(x) d\mathcal{L}^N(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \overline{v}(x) \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{u}(\xi) d\mathcal{L}^N(\xi) \right) d\mathcal{L}^N(x) \\ (\text{per il teorema di Fubini}) &= \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x \cdot \xi} \overline{v}(x) d\mathcal{L}^N(x) \right) d\mathcal{L}^N(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}}(\xi) d\mathcal{L}^N(\xi). \end{aligned}$$

□

Osservazione 10.2.14. (*Identità di Parseval*)

Se $u = v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$ si ha

$$\|u\|_2 = \|\widehat{u}\|_2.$$

Corollario 10.2.15. *La trasformata di Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^N)$ è una isometria (relativa alla metrica di $L^2(\mathbb{R}^N)$) del sottospazio denso $\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$ di $L^2(\mathbb{R}_x^N)$ su $\mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^N)$, di periodo 4.*

Dimostrazione. $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è di periodo 4, cioè

$$(\mathcal{F}^4 u)(x) = u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N;$$

infatti si ha (per il teorema di inversione di Fourier)

$$(\mathcal{F}^2 u)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i x \cdot \xi} (\mathcal{F} u)(\xi) d\mathcal{L}^N(\xi) = u(-x)$$

e quindi

$$(\mathcal{F}^4 u)(x) = (\mathcal{F}^2 u)(-x) = u(x).$$

Da ciò si deduce che \mathcal{F} è suriettiva; infatti fissato $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ esiste $\mathcal{F}^3 v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^3 v) = v.$$

Inoltre dal teorema di inversione di Fourier si ha

$$\widehat{u} = 0 \implies u = 0,$$

e quindi \mathcal{F} è iniettiva.

\mathcal{F} è continua per il teorema del grafico chiuso e tale è $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$. \square

10.3 La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^N)$

Per definire la trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}_x^N)$ usiamo la tecnica del prolungamento per continuità della trasformata di Fourier su $\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$. Ciò è possibile per la densità di $\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$ in $L^2(\mathbb{R}_x^N)$ e per la validità della formula

$$\|u\|_2 = \|\widehat{u}\|_2 \quad \text{per } u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$$

(osserviamo, per inciso, che per la norma $L^1(\mathbb{R}_x^N)$ tale formula non è valida e quindi non si può definire la trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}_x^N)$ con la tecnica del prolungamento per continuità. Tuttavia, come abbiamo già visto, per $u \in L^1(\mathbb{R}_x^N)$ si può definire direttamente la trasformata di Fourier).

Se $u \in L^2(\mathbb{R}_x^N)$, esiste $(u_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_2 = 0.$$

Dall'identità di Parseval in $\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$ si ha

$$\|\widehat{u_n} - \widehat{u_m}\|_2 = \left\| \widehat{u_n - u_m} \right\|_2 = \|u_n - u_m\|_2 \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0,$$

pertanto (\widehat{u}_n) è di Cauchy in $L^2(\mathbb{R}_\xi^N)$ e quindi convergente in $L^2(\mathbb{R}_\xi^N)$.

Definiamo **trasformata di Fourier di $u \in L^2(\mathbb{R}_x^N)$**

$$\Phi u := \lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{u}_n \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}_\xi^N).$$

Φu è ben definita (è indipendente dalla scelta della successione (u_n)).

La trasformazione $\Phi : L^2(\mathbb{R}_x^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_\xi^N)$ definita da

$$\Phi u = \lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{u}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_x^N} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u_n(x) d\mathcal{L}^N(x),$$

dove $(u_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_2 = 0$, è lineare.

L'identità di Parseval vale in $L^2(\mathbb{R}_\xi^N)$ poiché

$$\|\Phi u\|_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\widehat{u}_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_2 = \|u\|_2.$$

Questo implica che Φ è una trasformazione iniettiva di $L^2(\mathbb{R}_x^N)$ in $L^2(\mathbb{R}_\xi^N)$, ed è una isometria.

La trasformata inversa di Fourier $^\vee$ si estende allo stesso modo da $\mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^N)$ a $L^2(\mathbb{R}_\xi^N)$.

Infatti, la trasformazione $\Phi^{-1} : L^2(\mathbb{R}_\xi^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_x^N)$ definita da

$$\Phi^{-1} u := \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^\vee = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_\xi^N} e^{2\pi i x \cdot \xi} u_n(\xi) d\mathcal{L}^N(\xi),$$

dove $(u_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^N)$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_2 = 0$, è lineare.

Inoltre

$$\Phi^{-1}(\Phi u) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{u}_n \right)^\vee = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\widehat{u}_n)^\vee = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u = \Phi(\Phi^{-1} u).$$

Quindi Φ e Φ^{-1} sono isomorfismi isometrici di $L^2(\mathbb{R}_x^N)$ su $L^2(\mathbb{R}_\xi^N)$.

È così provato il fondamentale

Teorema 10.3.1. (*Teorema di Plancherel*)

Esiste una isometria Φ di $L^2(\mathbb{R}_x^N)$ su $L^2(\mathbb{R}_\xi^N)$ che è univocamente determinata dalla richiesta

$$\Phi u = \mathcal{F}u \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N).$$

Osservazione 10.3.2. Applicando l'identità di Parseval in $L^2(\mathbb{R}_\xi^N)$

$$\|u\|_2 = \|\Phi u\|_2$$

alle differenze $u_n - u$ si ha che

$$\Phi u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi u \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}_\xi^N) \quad \text{se e solo se} \quad u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}_x^N).$$

In particolare, se $\{K_n\}$ è una successione crescente di sottoinsiemi compatti di \mathbb{R}^N la cui unione sia \mathbb{R}^N e se χ_{K_n} è la funzione caratteristica di K_n , abbiamo per ogni $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$

$$u\chi_{K_n} \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$u\chi_{K_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^N).$$

Dunque $\mathcal{F}(u\chi_{K_n})$ si calcola con l'integrale e

$$\mathcal{F}(u\chi_{K_n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi u \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^N),$$

cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{K_n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(x) d\mathcal{L}^N(x) = (\Phi u)(\xi) \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^N).$$

Se il primo membro dell'uguaglianza precedente esiste anche nel senso della convergenza q.o., allora esso è proprio la trasformata $(\Phi u)(\xi)$.

Questa circostanza si verifica ad esempio quando, in una variabile, esiste il valor principale

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x \xi} u(x) d\mathcal{L}^1(x);$$

esso coincide q.o. con il valore $(\Phi u)(\xi)$ della trasformata di u .

Osservazione 10.3.3. Per concludere osserviamo che contrariamente a quanto accade in $L^2(\mathbb{R}^N)$, la trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^N)$ non è un isomorfismo isometrico di $L^1(\mathbb{R}^N_x)$ su $L^1(\mathbb{R}^N_\xi)$, e la trasformazione inversa di Fourier non può essere sempre definita.

10.4 Distribuzioni temperate

Per definire la trasformata di Fourier di una distribuzione occorre allargare lo spazio delle funzioni test ad uno spazio che si comporti bene rispetto alla trasformata. Lo spazio giusto di funzioni test non è $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ ma $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ ($\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$) in quanto se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e $\hat{\phi}$ è la sua trasformata di Fourier allora $\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Definizione 10.4.1. Siano $(\phi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Diremo che ϕ_j converge a ϕ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, e scriveremo $\phi_j \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} \phi$, se

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha (D^\beta \phi_j - D^\beta \phi)(x)| = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N.$$

Definizione 10.4.2. Sia $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{C}$ un funzionale lineare. Si dice che T è una *distribuzione temperata* se

$$\forall (\phi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \quad \phi_j \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} 0 \implies T(\phi_j) \xrightarrow{j} 0$$

(cioè se T è continuo rispetto alla convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$).

Lo spazio vettoriale delle distribuzioni temperate si indica con $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Tale spazio è il duale topologico di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Osservazione 10.4.3. Le distribuzioni temperate sono particolari distribuzioni in \mathbb{R}^N che all'infinito hanno un comportamento più controllato di quanto possa accadere alla generica distribuzione (classica) e questo consente maggiore generalità alle funzioni test.

Inoltre le distribuzioni temperate risultano più idonee di quelle classiche per estendere la trasformata di Fourier. In questo modo molte proprietà della trasformata di Fourier per le funzioni si trasferiscono alla trasformata di Fourier per le distribuzioni temperate.

Osservazione 10.4.4. Se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ allora, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$, la funzione $x \mapsto x^\alpha D^\beta u(x)$ è sommabile (e limitata). Infatti si ha

$$|x^\alpha D^\beta u(x)| \leq \frac{|x|^{|\alpha|+2N} |D^\beta u(x)|}{1 + |x|^{2N}}$$

e dalla sommabilità della funzione $(1 + |x|^{2N})^{-1}$ segue la sommabilità della funzione $x^\alpha D^\beta u(x)$.

Proposizione 10.4.5. *Ad ogni polinomio è associata una distribuzione temperata.*

Dimostrazione. Sia $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha$ un polinomio. Si ha

$$|P(x)| \leq C (1 + |x|^k) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

dove $C = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha$. Infatti per $|x| \leq 1$ risulta $|P(x)| \leq C$ e per $|x| \geq 1$ si ha $|x|^{|\alpha|} \leq |x|^k$. Per l'Osservazione 10.4.4 per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ il prodotto $P\phi$ è sommabile. Possiamo allora considerare il funzionale lineare T_P su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ associato a P definito da

$$\langle T_P, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} P(x) \phi(x) d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Il funzionale T_P è continuo rispetto alla convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Infatti, se $(\phi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tale che $\phi_j \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} 0$ risulta

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} P(x) \phi_j(x) d\mathcal{L}^N(x) \right| &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |(1 + |x|^k) \phi_j(x)| d\mathcal{L}^N(x) \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{1 + |x|^{2N}} d\mathcal{L}^N(x) \right) \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |(1 + |x|^k) \phi_j(x)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cioè $\langle T_P, \phi_j \rangle \xrightarrow{j} 0$. Pertanto T_P è una distribuzione temperata. \square

Ricordiamo che per le distribuzioni classiche risulta $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, nel senso che ad ogni $u \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$ si associa una particolare distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Tale risultato non vale per le distribuzioni temperate, come mostra il seguente esempio.

Esempio 10.4.6. Risulta $e^x \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Sia $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tale che $\varphi \geq 0$, $\varphi \equiv 1$ in $[0, 1]$ e $\text{supp } \varphi \subset]-2, 2[$. Poniamo $\phi_j(x) = \frac{1}{2^j} \varphi\left(\frac{x}{2^j}\right)$ e osserviamo che il supporto di ϕ_j è contenuto in $] - 2j, 2j[$. Pertanto

$\phi_j \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, poiché per ogni scelta di interi positivi p, q risulta $x^p D^q \phi_j(x) = 2^{-j} j^{-q} x^p D^q \varphi\left(\frac{x}{j}\right)$ e quindi

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p D^q \phi_j(x)| \leq \frac{j^{p-q} 2^p}{2^j} \|D^q \varphi\|_\infty \rightarrow 0.$$

Tuttavia

$$\int_{\mathbb{R}} e^x \phi_j(x) d\mathcal{L}^1(x) \geq \frac{1}{2^j} \int_0^j e^x d\mathcal{L}^1(x) = \frac{e^j - 1}{2^j} \rightarrow +\infty.$$

Proposizione 10.4.7. *Lo spazio $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ è denso in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, cioè per ogni $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ esiste una successione $(u_j) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $u_j \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} u$.*

Dimostrazione. Data $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si consideri la successione $(u_j) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ definita da

$$u_j(x) = u(x) \eta\left(\frac{|x|}{j}\right)$$

dove $\eta = \eta(s)$ è una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ uguale a 1 nell'intervallo $[0, 1]$ e nulla per $s > 2$. Risulta $u_j \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} u$. \square

Osservazione 10.4.8. Osserviamo che se $(\varphi_j) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ allora

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)} 0 \implies \varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} 0.$$

Infatti, per funzioni a supporto contenuto in un compatto comune la moltiplicazione per x^β non ha alcuna influenza sulla convergenza.

Da tale risultato segue che ogni distribuzione temperata, ristretta a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, è una distribuzione classica; si ha cioè $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Sussiste inoltre il seguente risultato.

Proposizione 10.4.9. *Ogni distribuzione (classica) a supporto compatto (cfr. Definizione 5.5.1) è anche una distribuzione temperata.*

Proposizione 10.4.10. *Se $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ ed esiste un polinomio $P = P(x)$ tale che*

$$\frac{u}{P} \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

allora $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, cioè u è associata ad una distribuzione temperata.

Dimostrazione. Sia $(\phi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tale che $\phi_j \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} 0$. Osservato che $P\phi_j \rightrightarrows 0$ uniformemente in \mathbb{R}^N , risulta

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \phi_j \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \phi_j(x) d\mathcal{L}^N(x) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)}{P(x)} P(x) \phi_j(x) d\mathcal{L}^N(x) \right| \\ &\leq \sup_{\mathbb{R}^N} |P\phi_j| \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{u(x)}{P(x)} \right| d\mathcal{L}^N(x) \xrightarrow{j} 0 \end{aligned}$$

essendo $u/P \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Quindi T_u è una distribuzione temperata. \square

Osservazione 10.4.11. Dalla proposizione precedente segue che ogni funzione “a crescita lenta”, ossia decomponibile nel prodotto di un polinomio e di una funzione sommabile, definisce una distribuzione temperata. Tuttavia, una distribuzione temperata non può crescere esponenzialmente, come dimostra l'Esempio 10.4.6.

Si può provare il seguente risultato.

Proposizione 10.4.12. Siano $(\phi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Allora se $\phi_j \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} \phi$ risulta

$$\widehat{\phi_j} \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} \widehat{\phi}.$$

Definizione 10.4.13. Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. La trasformata di Fourier \widehat{T} è la distribuzione temperata definita da

$$\langle \widehat{T}, \phi \rangle = \langle T, \widehat{\phi} \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Osserviamo che la definizione è ben posta essendo T una distribuzione temperata e $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, in quanto trasformata di una funzione $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$; inoltre, per la Proposizione 10.4.12, il funzionale \widehat{T} così definito è continuo rispetto alla convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e quindi \widehat{T} è una distribuzione temperata.

Esempio 10.4.14. Osservato che risulta

$$\langle \widehat{\delta}, \phi \rangle = \langle \delta, \widehat{\phi} \rangle = \widehat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) d\mathcal{L}^N(x)$$

si ha $\widehat{\delta} = 1$, cioè la trasformata di Fourier della distribuzione δ coincide con la distribuzione associata alla funzione costante di valore 1 che appartiene a $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$.

CAPITOLO 11

L'equazione del calore e alcuni problemi connessi

11.1 Il Problema di Cauchy per l'equazione del calore in \mathbb{R}^N

Assegnata $f = f(x)$ in \mathbb{R}^N il problema di Cauchy in avanti nel tempo (forward) per l'equazione del calore consiste nel cercare una funzione $u = u(x, t)$ definita e regolare per $x \in \mathbb{R}^N$ e solo per $t \geq 0$ tale che

$$\begin{cases} Hu(x, t) := \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \Delta_x u(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ & \text{(Equazione del calore)} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (P)$$

Dal punto di vista fisico il problema (P) descrive l'evoluzione temporale della distribuzione di temperatura in un mezzo omogeneo, essendo $u(x, t)$ la temperatura nel punto x all'istante t e la funzione f la temperatura all'istante $t = 0$.

Al fine di determinare una soluzione del problema (P) supponiamo per ogni $t > 0$, $x \mapsto u(x, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e usiamo il seguente procedimento (euristico): consideriamo la trasformata di Fourier (parziale) (cfr. Proposizione 10.2.4) rispetto a x , utilizziamo le relazioni usuali fra trasformata di Fourier e derivazione e arriviamo a una formula per la trasformata (parziale) \hat{u} della funzione incognita. Applicando allora la trasformata parziale di Fourier rispetto alla variabile x , il problema (P) diviene (assunto che $\hat{u}_t = \widehat{u_t}$)

$$\begin{cases} \hat{u}_t(\xi, t) + 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) = 0 & t > 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi). \end{cases} \quad (\hat{P})$$

Osserviamo che il problema (\hat{P}) rappresenta, per ogni (parametro) $\xi \in \mathbb{R}^N$, un problema di Cauchy per una equazione ordinaria del primo ordine in t . Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}_t(\xi, t)}{\hat{u}(\xi, t)} = -4\pi^2|\xi|^2 &\implies \log |\hat{u}(\xi, t)| = -4\pi^2|\xi|^2 t + c \\ &\implies \hat{u}(\xi, t) = c' e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}, \end{aligned}$$

con

$$c' = \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi);$$

pertanto la soluzione del problema (\hat{P}) è data da

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) \cdot e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}.$$

Definito per ogni $t > 0$

$$\hat{K}(\xi, t) = \hat{K}_t(\xi) := e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} \left(= e^{-\pi|\xi|^2 (4\pi t)} \right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \quad (11.1)$$

risulta

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{K}_t(\xi)$$

e quindi la soluzione del problema (\hat{P}) può essere espressa come

$$\hat{u}(\xi, t) = (f * K_t)^\wedge(\xi).$$

Applicando la trasformata inversa di Fourier si ottiene una soluzione del problema (P) data da

$$u(x, t) = (f * K_t)(x).$$

Per esplicitare $K_t(x)$ applichiamo il risultato dell'Esempio 10.2.8 con $a = \frac{1}{4\pi t}$; si ottiene quindi la seguente espressione

$$K_t(x) = K(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0. \quad (11.2)$$

In definitiva si ha che una soluzione del problema (P) è data dalla funzione

$$\boxed{\begin{aligned} u(x, t) = (f * K_t)(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} K_t(x - y) f(y) d\mathcal{L}^N(y) \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) d\mathcal{L}^N(y). \end{aligned}} \quad (11.3)$$

La funzione $K_t(x)$ si chiama **nucleo di Gauss-Weierstrass** (o anche *nucleo del calore*) ed è, come vedremo nel successivo paragrafo 11.2, la soluzione fondamentale per l'operatore del calore.

Proposizione 11.1.1. *Il nucleo $K_t(x)$ soddisfa le seguenti proprietà:*

- (i) $K_t(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[);$

- (ii) per ogni $t > 0$ si ha $K_t(\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$;
 (iii) $K_t(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N, t > 0$;
 (iv) $K_t(x)$ è soluzione dell'equazione omogenea del calore, cioè

$$HK_t(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^N, t > 0;$$

- (v) per ogni $t > 0$ risulta

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_t(x) d\mathcal{L}^N(x) = 1.$$

Dimostrazione. Le proprietà (i), (ii) e (iii) seguono immediatamente dalla definizione di $K_t(x)$ data in (11.2).

Proviamo (iv). Essendo, per il teorema di inversione di Fourier (Teorema 10.2.11),

$$K_t(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{K}_t(\xi) d\mathcal{L}^N(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x \cdot \xi} e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} d\mathcal{L}^N(\xi)$$

si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} K_t(x) = \int_{\mathbb{R}^N} (-4\pi^2 |\xi|^2) e^{2\pi i x \cdot \xi} e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} d\mathcal{L}^N(\xi),$$

inoltre

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} K_t(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} 2\pi i \xi_j e^{2\pi i x \cdot \xi} e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} d\mathcal{L}^N(\xi) \quad (j = 1, \dots, N), \\ \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} K_t(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} (-4\pi^2 \xi_j^2) e^{2\pi i x \cdot \xi} e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} d\mathcal{L}^N(\xi) \end{aligned}$$

e quindi

$$\Delta_x K_t(x) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} K_t(x) = \int_{\mathbb{R}^N} (-4\pi^2 |\xi|^2) e^{2\pi i x \cdot \xi} e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} d\mathcal{L}^N(\xi),$$

da cui

$$HK_t(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, t > 0.$$

La proprietà (v) segue osservando che dalla rappresentazione integrale

$$\widehat{K}_t(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i x \cdot \xi} K_t(x) d\mathcal{L}^N(x)$$

e dalla definizione stessa di $\widehat{K}_t(\xi)$ data in (11.1) si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_t(x) d\mathcal{L}^N(x) = \widehat{K}_t(0) = 1. \quad \square$$

Ora procediamo a ritroso; assumiamo la (11.3) come definizione della funzione u e controlliamo sotto quali ipotesi u è soluzione del problema di partenza (P).

È importante osservare che è necessario chiarire in che senso tale u è soluzione del problema (P); il problema più delicato consiste nell'attribuire un significato preciso

alla condizione di Cauchy quando la u costruita non è una funzione continua (per $t = 0$).

Sussiste il seguente risultato di esistenza.

Teorema 11.1.2. (a) Se $f \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ allora la funzione

$$u(x, t) = (f * K_t)(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[)$$

è una soluzione dell'equazione del calore; inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x)$$

e quindi

$$u(x, t) \in C^0(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[).$$

In definitiva la funzione $u(x, t)$ è una soluzione del problema di Cauchy (P) di classe $C^0(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[) \cap C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[)$.

(b) Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < +\infty$, allora la funzione

$$u(x, t) = (f * K_t)(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[)$$

è una soluzione dell'equazione del calore; inoltre

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x, t) - f(x)|^p d\mathcal{L}^N(x) = 0.$$

Dimostrazione. Osserviamo che per ogni $t > 0$ risulta $K_t(\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,

$$K_t(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[),$$

e inoltre³⁰

$$u(x, t) = (f * K_t)(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[).$$

Ricordato che

$$HK_t(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0,$$

segue

$$H(f * K_t)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0.$$

Dimostriamo ora che, se $f \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x) \quad (\text{condizione di Cauchy}),$$

pertanto $u \in C^0(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$. Poiché

$$K_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0,$$

³⁰Cfr. Teorema 5.1.11.

si ha

$$K_1(x) = (4\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}$$

e quindi

$$K_t(x) = K_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot t^{-\frac{N}{2}}.$$

Posto $\varepsilon = \sqrt{t}$ ($t > 0$), per il teorema di approssimazione dell'identità 5.3.1, si ha

$$(f * K_t)(x) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} f(x)$$

poiché $f \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_t(x) d\mathcal{L}^N(x) = 1 \quad \text{per } t > 0.$$

Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < +\infty$, allora, ancora per il teorema dell'approssimazione dell'identità, si ha

$$u(\cdot, t) = (f * K_t)(\cdot) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} f(\cdot) \quad \text{in norma } L^p(\mathbb{R}^N)$$

e la dimostrazione è completa. \square

Osservazione 11.1.3. Dal precedente teorema deduciamo che l'operatore del calore produce un “effetto fortemente regolarizzante” sulle soluzioni, perché negli istanti successivi a quello iniziale, anche con dato f discontinuo, la soluzione è C^∞ e pertanto, in generale, descrive fenomeni irreversibili in quanto non possiamo aspettarci di ottenere una soluzione per $t < 0$, salvo che il dato “finale” f abbia la regolarità compatibile con quella delle soluzioni in avanti nel tempo.

Il problema di Cauchy retrogrado nel tempo (backward) per l'equazione del calore

$$\begin{cases} Hu(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}^N, \quad t < 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (11.4)$$

in generale è mal posto.

Osserviamo che anche se il problema di Cauchy retrogrado ha soluzione, la dipendenza continua dai dati può non sussistere, come mostra il seguente esempio di Hadamard: per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione

$$u_\varepsilon(x, t) = \varepsilon e^{-t/\varepsilon^2} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

è soluzione³¹ dell'equazione del calore, in dimensione (spaziale) $N = 1$, in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e in particolare risolve il problema retrogrado (11.4) con dato $f_\varepsilon(x) = \varepsilon \operatorname{sen}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Si ha

$$\|f_\varepsilon\|_{\infty, \mathbb{R}} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{} 0.$$

³¹Posto $u_\varepsilon(x, t) = \varphi(x) \psi(t)$ si ha $u_\varepsilon(x, 0) = \varphi(x) \psi(0) = \varepsilon \operatorname{sen}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ e quindi $\varphi(x) = \frac{\varepsilon \operatorname{sen}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\psi(0)}$.

Allora

$$u_\varepsilon(x, t) = \varepsilon \operatorname{sen}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\psi(t)}{\psi(0)},$$

Tuttavia, per ogni $t < 0$, risulta

$$\|u_\varepsilon(\cdot, t)\|_{\infty, \mathbb{R}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} +\infty.$$

Osservazione 11.1.4. Se $f \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ allora $u(x, t) = (f * K_t)(x)$ è limitata in $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[$, in quanto

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty, \mathbb{R}^N} \leq \|f\|_{\infty, \mathbb{R}^N} \quad \forall t \geq 0$$

(dipendenza continua della soluzione dal dato iniziale)

e si può provare (via il Principio del massimo Teorema 11.5.1) che essa è l'unica soluzione limitata del problema di Cauchy (P) (cfr. Teorema 11.5.6).

Osservazione 11.1.5. Supponiamo che nella formula

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) d\mathcal{L}^N(y)$$

la funzione f sia non-negativa, non identicamente nulla e abbia supporto in $B_r(0)$. Allora $u(x, t)$ è strettamente positiva per ogni $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[$.

In particolare, la temperatura iniziale è percepita dalla soluzione in ogni $|x|$ comunque grande e in ogni $t > 0$ comunque piccolo (anche se solo in modo impercettibile). Pertanto la temperatura iniziale si propaga con velocità infinita³².

Osservazione 11.1.6. Il problema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - D \Delta_x u(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (11.5)$$

dove il coefficiente di diffusione $D > 0$ rappresenta la risposta termica del materiale, si riconduce al problema (P) con il cambio di variabile temporale $\tau = Dt$.

Per il problema (11.5) il nucleo del calore è quindi dato da

$$K_D(x, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0$$

per cui (imponendo che $u(x, t)$ soddisfi l'equazione del calore)

$$\varepsilon \operatorname{sen}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\psi'(t)}{\psi(0)} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon} \frac{\psi(t)}{\psi(0)} = 0$$

e quindi

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\frac{1}{\varepsilon^2},$$

da cui

$$\psi(t) = \psi(0) e^{-t/\varepsilon^2}$$

e, in definitiva,

$$u_\varepsilon(x, t) = \varepsilon \operatorname{sen}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e^{-t/\varepsilon^2}.$$

³²Cfr. **G. Fichera**: *Is the Fourier Theory of Heat propagation paradoxical?*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, Tomo XLI, pp. 5-28, 1992.

e in particolare, in dimensione (spaziale) $N = 1$ e per $D = \frac{1}{2}$, si ha

$$K_D(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (11.6)$$

11.2 Soluzione fondamentale per l'operatore del calore

Il Teorema di Malgrange-Ehrenpreis 3.3.6 garantisce che ogni operatore differenziale a coefficienti costanti ha una soluzione fondamentale. Proviamo che il nucleo del calore è una soluzione fondamentale per l'operatore del calore.

Teorema 11.2.1. *Il nucleo di Gauss-Weierstrass*

$$K_t(x) = K(x, t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N, \quad t \leq 0 \end{cases}$$

è una soluzione fondamentale per l'operatore del calore, cioè

$$\langle HK, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0, 0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times]-\infty, +\infty[).$$

Dimostrazione. Occorre provare che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times]-\infty, +\infty[)$ risulta

$$\int_{\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[} K_t(x) \left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) \varphi(x, t) d\mathcal{L}^N(x) d\mathcal{L}^1(t) = \varphi(0, 0).$$

Sia $\varepsilon > 0$ e consideriamo

$$\int_{\mathbb{R}^N \times]\varepsilon, +\infty[} K_t(x) \left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) \varphi(x, t) d\mathcal{L}^N(x) d\mathcal{L}^1(t).$$

Integrando per parti nella variabile t e tenendo presente che φ è nulla al di fuori di un compatto si ha

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N \times]\varepsilon, +\infty[} K_t(x) \left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) \varphi(x, t) d\mathcal{L}^N(x) d\mathcal{L}^1(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{]\varepsilon, +\infty[} K_t(x) \left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) \varphi(x, t) d\mathcal{L}^1(t) \right) d\mathcal{L}^N(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{]\varepsilon, +\infty[} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) K_t(x) \varphi(x, t) d\mathcal{L}^1(t) + K_\varepsilon(x) \varphi(x, \varepsilon) \right) d\mathcal{L}^N(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \times]\varepsilon, +\infty[} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) K_t(x) \varphi(x, t) d\mathcal{L}^N(x) d\mathcal{L}^1(t) + \int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x) \varphi(x, \varepsilon) d\mathcal{L}^N(x). \end{aligned}$$

Tenuto conto della (iv) della proposizione 11.1.1, risulta

$$\int_{\mathbb{R}^N \times]\varepsilon, +\infty[} K_t(x) \left(-\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) \varphi(x, t) d\mathcal{L}^N(x) d\mathcal{L}^1(t) = \int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x) \varphi(x, \varepsilon) d\mathcal{L}^N(x);$$

inoltre si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x) \varphi(x, \varepsilon) d\mathcal{L}^N(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x) \varphi(x, 0) d\mathcal{L}^N(x) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x) [\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)] d\mathcal{L}^N(x) \\ &= I_\varepsilon + J_\varepsilon \end{aligned}$$

dove si è posto

$$I_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x) \varphi(x, 0) d\mathcal{L}^N(x)$$

e

$$J_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x) [\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)] d\mathcal{L}^N(x).$$

Per $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times]-\infty, +\infty[)$, risulta per la (v) della proposizione 11.1.1

$$|J_\varepsilon| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)| \|K_\varepsilon\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)|$$

e sfruttando la continuità di φ

$$\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_\varepsilon = 0.$$

Per dimostrare la tesi è quindi sufficiente provare che

$$\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon = \varphi(0, 0). \quad (11.7)$$

Sia $\mu > 0$ fissato. Per la continuità della funzione φ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $|x| < \delta$ si ha $|\varphi(x, 0) - \varphi(0, 0)| < \mu$. Risulta allora

$$\begin{aligned} |I_\varepsilon - \varphi(0, 0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} K_\varepsilon(x) [\varphi(x, 0) - \varphi(0, 0)] d\mathcal{L}^N(x) \right| \\ &\leq 2 \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\delta(0)} K_\varepsilon(x) d\mathcal{L}^N(x) \\ &\quad + \int_{B_\delta(0)} K_\varepsilon(x) |\varphi(x, 0) - \varphi(0, 0)| d\mathcal{L}^N(x) \\ &\leq 2 \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\delta(0)} K_\varepsilon(x) d\mathcal{L}^N(x) + \mu. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Posto $x = r\omega$ con $r = |x|$ otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\delta(0)} K_\varepsilon(x) d\mathcal{L}^N(x) = \frac{C(N)}{\varepsilon^{N/2}} \int_\delta^{+\infty} r^{N-1} e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}} d\mathcal{L}^1(r). \quad (11.9)$$

Per $r \in [\delta, +\infty[$ si ha

$$\frac{1}{\varepsilon^{N/2}} r^{N-1} e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}} \rightrightarrows 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0^+ \quad \text{uniformemente rispetto a } r.$$

Passando al limite sotto il segno di integrale in (11.9), si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{C(N)}{\varepsilon^{N/2}} \int_\delta^{+\infty} r^{N-1} e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}} d\mathcal{L}^1(r) = \int_\delta^{+\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{C(N)}{\varepsilon^{N/2}} r^{N-1} e^{-\frac{r^2}{4\varepsilon}} d\mathcal{L}^1(r) = 0.$$

La (11.7) segue dall'arbitrarietà di μ in (11.8). \square

11.3 Questioni di unicità della soluzione del Problema di Cauchy per l'equazione del calore

In generale per il Problema di Cauchy per l'equazione del calore non è verificata l'unicità della soluzione come dimostra il seguente controesempio di Tychonov³³.

Controesempio di Tychonov all'unicità 11.3.1. Si consideri il problema, in dimensione (spaziale) $N = 1$,

$$\begin{cases} Hu(x, t) = u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (11.10)$$

Si ponga ora

$$\psi(x, t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \varphi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

dove la funzione φ è definita da

$$\varphi(z) = \begin{cases} e^{-1/z^2} & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

La funzione $\psi(x, t)$ è soluzione del problema (11.10). Pertanto, avendo il problema (11.10) per soluzione anche la funzione identicamente nulla, non vi è unicità.

Per provarlo premettiamo il seguente lemma.

Lemma 11.3.2. Fissato $t > 0$, la funzione $\psi(x, t)$ è uniformemente convergente in un intorno di ogni punto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$; inoltre

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0^+} \psi(x, t) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Identifichiamo l'asse t come l'asse reale nel piano complesso. Sia $t > 0$ fissato; la funzione $z \mapsto \varphi(z)$ è olomorfa all'interno della circonferenza del piano complesso

$$\gamma = \left\{ z \in \mathbb{C}; z = t + \frac{t}{2} e^{i\theta} \right\}, \quad 0 < \theta \leq 2\pi,$$

pertanto dalla formula di Cauchy per le derivate risulta

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} \varphi(t) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(z)}{(z-t)^{n+1}} dz \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ovvero, passando ai moduli, poiché $|dz| = \frac{t}{2} d\theta$, $|z-t| = \frac{t}{2}$ e $|\varphi(z)| = e^{-\operatorname{Re}(z^{-2})}$

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial t^n} \varphi(t) \right| \leq \frac{n! 2^n}{2\pi t^n} \int_0^{2\pi} e^{-\operatorname{Re}(z^{-2})} d\theta.$$

³³Cfr. A. Tychonov: *Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur*, Math. Sbornik, 42, pp. 199–216, 1935.

Osservato che per $z \in \gamma$ risulta $z^2 = t^2 \left(1 + \frac{1}{2}e^{i\theta}\right)^2$, $z^{-2} = t^{-2} \frac{(1 + \frac{1}{4}e^{-2i\theta} + e^{-i\theta})}{\left|(1 + \frac{1}{2}e^{i\theta})^2\right|^2}$ e

quindi $\operatorname{Re}(z^{-2}) \geq (2t)^{-2}$, si ha

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial t^n} \varphi(t) \right| \leq \frac{n! 2^n}{t^n} e^{-\frac{1}{4t^2}}.$$

Fissiamo $x \in \mathbb{R}$ e $\rho > 0$. Allora per ogni $|x| < \rho$, applicando la disuguaglianza di Stirling

$$\frac{n! 2^n}{(2n)!} \leq \frac{1}{n!},$$

si ottiene

$$|\psi(x, t)| \leq e^{-\frac{1}{4t^2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{t^n} \frac{\rho^{2n}}{n!} = e^{-\frac{1}{4t^2}} e^{\frac{\rho^2}{t}}.$$

Passando al limite per $t \rightarrow 0^+$, si ottiene

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \psi(x, t) = 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

□

A questo punto, per il Lemma 11.3.2 si può derivare per serie e si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \varphi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \varphi(t) (2n)(2n-1) \frac{x^{2(n-1)}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \varphi(t) \frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \varphi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Resta così provato che la funzione $\psi(x, t)$ è anche soluzione del problema (11.10).

Osservazione 11.3.3. Nei paragrafi successivi presenteremo alcuni risultati di unicità della soluzione, validi sotto opportune ipotesi sulla soluzione e sui dati, con riferimento al problema di Cauchy in \mathbb{R}^N (Teorema 11.5.4 e Teorema 11.5.6) e al problema di Cauchy in aperti connessi limitati nei casi di problema misto omogeneo (Teorema 11.4.3), problema misto non-omogeneo (Teorema 11.6.6), problema retrogrado (Teorema 11.7.2).

11.4 Il Principio del massimo (minimo) debole e unicità, in aperti connessi limitati

Sia Ω un aperto connesso limitato di \mathbb{R}^N con frontiera topologica $\partial\Omega$ regolare. Denotiamo con Ω_T , $0 < T < +\infty$, il *cilindro parabolico*

$$\Omega_T = \Omega \times]0, T]$$

e sia inoltre

$$\Sigma_T = \overline{\Omega}_T \setminus \Omega_T$$

il *bordo parabolico del cilindro* Ω_T . Osserviamo che

$$\Sigma_T = (\partial\Omega \times [0, T]) \cup (\Omega \times \{t = 0\}) = \partial\Omega_T \setminus (\Omega \times \{t = T\}) .$$

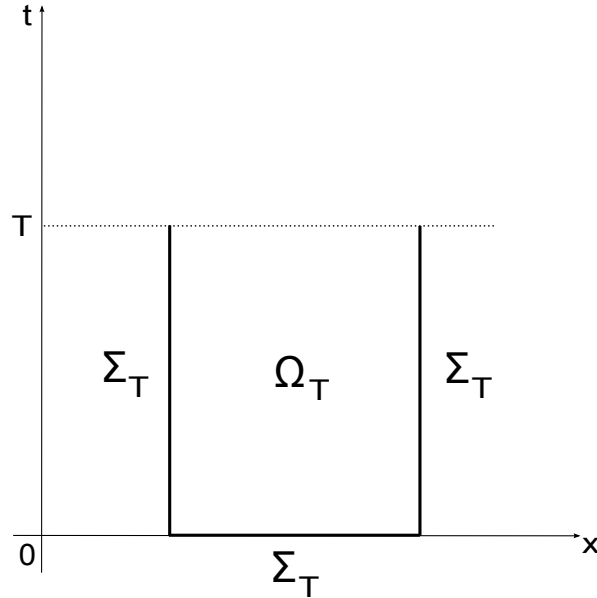


Figura 11.1: Cilindro parabolico e bordo parabolico

Denotiamo con C_1^2 lo spazio delle funzioni derivabili due volte rispetto a x e una rispetto a t con derivate continue,

$$C_1^2(\Omega_T) = \{u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}; u_t, u_{x_i x_j} \in C^0(\Omega_T), i, j = 1, \dots, N\}$$

Teorema 11.4.1. (*Principio del massimo (risp. minimo) debole*)

Sia $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ tale che $Hu(x, t) \leq 0$ (risp. $Hu(x, t) \geq 0$) in Ω_T . Allora

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\Sigma_T} u \quad \left(\text{risp.} \quad \min_{\overline{\Omega}_T} u = \min_{\Sigma_T} u \right) .$$

Dimostrazione. Proviamo il principio del massimo debole. Sia $\varepsilon \in]0, T[$ fissato e consideriamo la funzione ausiliaria

$$v(x, t) = u(x, t) - \varepsilon t, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}_{T-\varepsilon} .$$

Poiché $v \in C^0(\overline{\Omega}_{T-\varepsilon})$ essa ha massimo in $\overline{\Omega}_{T-\varepsilon}$.

Procedendo per assurdo, supponiamo che tale massimo sia assunto in un punto $(x^0, t_0) \in \Omega \times]0, T - \varepsilon]$, ovvero non appartenente al bordo parabolico di $\Omega_{T-\varepsilon}$.

Fissato x^0 e considerata la v come funzione della sola variabile t si ha pertanto $\frac{\partial}{\partial t}v(x^0, t_0) \geq 0$ se $t_0 = T - \varepsilon$ e $\frac{\partial}{\partial t}v(x^0, t_0) = 0$ altrimenti. Analogamente, fissato t_0 , e considerata la v di volta in volta come funzione di una sola delle variabili spaziali, mantenendo fisse tutte le altre, si ottiene $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}v(x^0, t_0) \leq 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, da cui segue $\Delta_x v(x^0, t_0) \leq 0$. Si ha pertanto $Hv(x^0, t_0) \geq 0$. D'altra parte, dalla definizione di v e dall'ipotesi $Hu(x, t) \leq 0$, riesce

$$Hv(x, t) = Hu(x, t) - \varepsilon \leq -\varepsilon < 0$$

che contraddice il risultato precedente. Pertanto deve essere $(x^0, t_0) \in \Sigma_{T-\varepsilon}$.

Risulta

$$\sup_{\overline{\Omega}_{T-\varepsilon}} v(x, t) \leq \sup_{\Sigma_{T-\varepsilon}} v(x, t) \leq \sup_{\Sigma_T} v(x, t) \leq \sup_{\Sigma_T} u(x, t) + \varepsilon T$$

cioè

$$\sup_{\overline{\Omega}_{T-\varepsilon}} u(x, t) - \varepsilon T \leq \sup_{\Sigma_T} u(x, t) + \varepsilon T$$

da cui

$$u(x, t) \leq \sup_{\Sigma_T} u + 2\varepsilon T \quad \forall (x, t) \in \overline{\Omega}_{T-\varepsilon}.$$

Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ si ha la tesi. \square

Dal principio di massimo e minimo debole precedente segue immediatamente il seguente corollario.

Corollario 11.4.2. *Sia $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ tale che $Hu(x, t) = 0$ in Ω_T . Allora*

$$\|u\|_{\infty, \Omega_T} = \|u\|_{\infty, \Sigma_T}.$$

Consideriamo il seguente *problema*: $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$

$$\begin{cases} Hu(x, t) = f(x, t) & \text{in } \Omega_T, \quad f \in C^0(\Omega_T) \\ u(x, t) = \varphi(x, t) & \text{su } \Sigma_T, \quad \varphi \in C^0(\Sigma_T) \end{cases} \quad (11.11)$$

in cui il dato al contorno è preso limitatamente al bordo parabolico dell'aperto considerato.

Per tale problema vale un risultato di unicità della soluzione che è conseguenza del Principio del massimo debole.

Teorema 11.4.3. *(Unicità in aperti connessi limitati)*

Esiste al più una soluzione di classe $C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ del problema (11.11).

Dimostrazione. Siano u^1, u^2 soluzioni di classe $C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ del problema (11.11). Allora la funzione $v = u^1 - u^2$ è di classe $C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ ed è soluzione del problema

$$\begin{cases} Hv(x, t) = 0 & \text{in } \Omega_T \\ v(x, t) = 0 & \text{su } \Sigma_T. \end{cases}$$

Pertanto, per il Corollario 11.4.2 si ha

$$\|v\|_{\infty, \Omega_T} = \|v\|_{\infty, \Sigma_T} = 0$$

da cui segue che $v = 0$ e quindi $u^1 = u^2$. \square

Osservazione 11.4.4. (*Esempio di problema al contorno mal posto per l'equazione del calore*)

Il principio del massimo debole permette di dimostrare che il problema di Dirichlet con dato assegnato su tutta la frontiera di Ω_T è in generale mal posto per l'equazione del calore, potendo tale problema al contorno per l'equazione del calore non aver soluzione.

Si consideri infatti il problema

$$\begin{cases} Hu(x, t) = u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 & \text{in } Q \\ u(x, t) = \varphi(x, t) & \text{su } \partial Q \end{cases} \quad (11.12)$$

dove $Q = \{(x, t); 0 < x < 1, 0 < t < 1\}$ è il quadrato unitario di \mathbb{R}^2 e $\varphi(x, t)$ una funzione di classe $C^0(\overline{Q})$ che assume massimo assoluto solo in $\{0 < x < 1\} \times \{t = 1\}$. Ad esempio si può considerare la funzione $\varphi(x, t) = x(1 - x) + t$ che ha massimo assoluto nel punto $(1/2, 1)$.

L'esistenza di una soluzione del problema (11.12) sarebbe pertanto in contraddizione con il Teorema 11.4.1.

Proviamo ora un risultato di *regolarità delle soluzioni* (cfr. Teorema 11.4.6). Premettiamo il seguente lemma che fornisce una formula di rappresentazione per le soluzioni dell'equazione del calore.

Lemma 11.4.5. *Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^N con frontiera topologica $\partial\Omega$ di classe C^1 . Sia $u \in C_1^2(\overline{\Omega}_T)$ soluzione dell'equazione del calore in Ω_T , cioè*

$$Hu(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \Omega_T.$$

Allora si ha la seguente formula di rappresentazione valida per ogni $(x^0, t_0) \in \Omega_T$

$$\begin{aligned} u(x^0, t_0) &= \int_0^{t_0} \int_{\partial\Omega} K_{t_0-t}(\xi - x^0) \frac{\partial}{\partial \nu} u(\xi, t) \cdot \nu(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) d\mathcal{L}^1(t) \\ &\quad - \int_0^{t_0} \int_{\partial\Omega} u(\xi, t) \frac{\partial}{\partial \nu} K_{t_0-t}(\xi - x^0) \cdot \nu(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) d\mathcal{L}^1(t) \\ &\quad + \int_{\Omega} u(x, 0) K_{t_0}(x - x^0) d\mathcal{L}^N(x). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia $v \in C_1^2(\overline{\Omega}_T)$. Per la funzione $F : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ definita da

$$F(x, t) := \left(u(x, t) \nabla_x v(x, t) - v(x, t) \nabla_x u(x, t), u(x, t) v(x, t) \right)$$

vale la proprietà³⁴

$$\operatorname{div}_{x,t} F(x, t) = u(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) + \Delta_x v(x, t) \right) + v(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \Delta_x u(x, t) \right).$$

Sia $(x^0, t_0) \in \Omega_T$. Posto

$$v(x, t) = K_{t_0-t+\varepsilon}(x - x^0), \quad t < t_0$$

e osservato che per $t < t_0$ risulta

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) + \Delta_x v(x, t) = 0,$$

dalla proprietà precedente segue, per $x \in \Omega$ e $t < t_0$,

$$\operatorname{div}_{x,t} F(x, t) = 0.$$

Applicando il teorema della divergenza all'aperto di \mathbb{R}^{N+1}

$$E = \Omega \times]0, t_0[$$

si ha

$$0 = \int_E \operatorname{div}_{x,t} F(x, t) d\mathcal{L}^{N+1}(x, t) = \int_{\partial E} F(y) \cdot \nu^*(y) d\mathcal{H}^N(\xi),$$

dove $\nu^*(y) \in \mathbb{R}^{N+1}$ è il versore normale esterno applicato a $y \in \partial E$ (ove definito).

Osservato che

$$\partial E = \left(\partial\Omega \times]0, t_0[\right) \cup \left(\overline{\Omega} \times \{t = 0\} \right) \cup \left(\overline{\Omega} \times \{t = t_0\} \right)$$

si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial E} F(y) \cdot \nu^*(y) d\mathcal{H}^N(y) \\ &= \int_0^{t_0} \left[\int_{\partial\Omega} \left(u(\xi, t) \nabla_\xi K_{t_0-t+\varepsilon}(\xi - x^0) - K_{t_0-t+\varepsilon}(\xi - x^0) \nabla_\xi u(\xi, t) \right) \cdot \nu(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \right] d\mathcal{L}^1(t) \\ &\quad + \int_\Omega u(x, t_0) K_\varepsilon(x - x^0) d\mathcal{L}^N(x) - \int_\Omega u(x, 0) K_{t_0+\varepsilon}(x - x^0) d\mathcal{L}^N(x) \end{aligned}$$

³⁴Infatti

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{x,t} F(x, t) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} (uv)(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} v(x, t) - v(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x, t) \right) + v(x, t) \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + u(x, t) \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} v(x, t) + u(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} v(x, t) - \frac{\partial}{\partial x_i} u(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} v(x, t) - v(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x, t) \right) \\ &\quad + v(x, t) \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + u(x, t) \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) \\ &= u(x, t) \Delta_x v(x, t) - v(x, t) \Delta_x u(x, t) + v(x, t) \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + u(x, t) \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) \\ &= u(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) + \Delta_x v(x, t) \right) + v(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \Delta_x u(x, t) \right). \end{aligned}$$

dove $\nu(\xi) \in \mathbb{R}^N$ è il versore normale esterno applicato a $\xi \in \partial\Omega$ (ove definito).
Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ risulta

$$(u(\cdot, t_0) * K_\varepsilon(\cdot))(x^0) \longrightarrow u(x^0, t_0)$$

e inoltre

$$(u(\cdot, 0) * K_{t_0+\varepsilon}(\cdot))(x^0) \longrightarrow (u(\cdot, 0) * K_{t_0}(\cdot))(x^0)$$

e quindi si ottiene

$$\begin{aligned} u(x^0, t_0) &= \int_0^{t_0} \int_{\partial\Omega} K_{t_0-t}(\xi - x^0) \nabla_\xi u(\xi, t) \cdot \nu(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) d\mathcal{L}^1(t) \\ &\quad - \int_0^{t_0} \int_{\partial\Omega} u(\xi, t) \nabla_\xi K_{t_0-t}(\xi - x^0) \cdot \nu(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) d\mathcal{L}^1(t) \\ &\quad + \int_\Omega u(x, 0) K_{t_0}(x - x^0) d\mathcal{L}^N(x) \end{aligned} \quad (11.13)$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} u(x^0, t_0) &= \int_0^{t_0} \int_{\partial\Omega} K_{t_0-t}(\xi - x^0) \frac{\partial}{\partial \nu} u(\xi, t) \cdot \nu(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) d\mathcal{L}^1(t) \\ &\quad - \int_0^{t_0} \int_{\partial\Omega} u(\xi, t) \frac{\partial}{\partial \nu} K_{t_0-t}(\xi - x^0) \cdot \nu(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) d\mathcal{L}^1(t) \\ &\quad + \int_\Omega u(x, 0) K_{t_0}(x - x^0) d\mathcal{L}^N(x). \quad \square \end{aligned}$$

Dalla formula di rappresentazione della soluzione provata nel lemma precedente, segue immediatamente il seguente risultato di regolarità.

Teorema 11.4.6. (*Regolarità delle soluzioni*)

Sia $u \in C_1^2(\overline{\Omega}_T)$ soluzione dell'equazione del calore in Ω_T , cioè

$$Hu(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \Omega_T.$$

Allora $u \in C^\infty(\Omega_T)$.

Osservazione 11.4.7. Osserviamo che in generale non è garantita l'esistenza di una soluzione per il problema (omogeneo) retrogrado (backward)

$$\begin{cases} Hu(x, t) = 0 & \text{in } \Omega_T \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \times [0, T] \\ u(x, T) = f(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

dove f e g sono funzioni di classe C^2 nei rispettivi domini e tali da raccordarsi con continuità. Infatti, per la formula di rappresentazione del Lemma 11.4.5, una eventuale soluzione $u \in C_1^2(\overline{\Omega}_T)$ del problema precedente sarebbe di classe C^∞ su $\Omega \times \{t = T\}$ mentre la funzione f non è detto che abbia tale regolarità.

11.5 Il Principio del massimo in \mathbb{R}^N

Un risultato analogo al Teorema 11.4.1 è possibile in \mathbb{R}^N se si impongono condizioni sul comportamento di $x \mapsto u(x, t)$ per $|x| \rightarrow +\infty$. Sussiste il seguente risultato.

Teorema 11.5.1. (*Principio del massimo in \mathbb{R}^N*)

Sia $f \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e sia $u \in C_1^2(\mathbb{R}^N \times]0, T]) \cap C^0(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ soluzione del problema

$$\begin{cases} Hu(x, t) \leq 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, T[\\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

tale che

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T] \quad u(x, t) \leq C e^{\lambda |x|^2} \quad (11.14)$$

con C, λ costanti positive. Allora

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} f.$$

Dimostrazione. È sufficiente provare la tesi nel caso

$$4\lambda T < 1.$$

Infatti, se $4\lambda T \geq 1$ si può suddividere l'intervallo $[0, T]$ in m sottointervalli $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, ciascuno di ampiezza $\tau = \frac{T}{m} < \frac{1}{4\lambda}$ e con $t_j = j\tau$. Allora per ogni $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]$, se $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ è scelto tale che $t \in [t_k, t_{k+1}]$, si ha

$$u(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x, t_k) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x, t_{k-1}) \leq \dots \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x, 0) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} f(x).$$

Supponiamo quindi $4\lambda T < 1$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che $4\lambda(T + \varepsilon) < 1$. La funzione

$$v(x, t) := u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{\frac{N}{2}}} e^{\frac{|x|^2}{4(T + \varepsilon - t)}}, \quad \mu > 0$$

verifica $Hv \leq 0$. Applicando quindi il Teorema 11.4.1 con $\Omega = B_r(0)$ e $r > |x^0|$ si ha

$$\max_{\bar{\Omega}_T} v = \max_{\Sigma_T} v$$

dove $\Omega_T = \Omega \times]0, T]$ è il cilindro parabolico e Σ_T il bordo parabolico di Ω_T .

Analizziamo il comportamento di v su Σ_T .

Per $t = 0$ si ha $v(x, 0) \leq u(x, 0) = f(x)$ e quindi $v(x, 0) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} f$.

Su $\partial\Omega \times [0, T]$ si ha $|x| = r$ e quindi

$$\begin{aligned} v(x, t) &= u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{\frac{N}{2}}} e^{\frac{|x|^2}{4(T + \varepsilon - t)}} \\ &\leq C e^{\lambda |x|^2} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{\frac{N}{2}}} e^{\frac{|x|^2}{4(T + \varepsilon)}} \\ &= C e^{\lambda r^2} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{\frac{N}{2}}} e^{\frac{r^2}{4(T + \varepsilon)}} \\ &= C e^{\lambda r^2} - \mu (4(\lambda + \gamma))^{\frac{N}{2}} e^{(\lambda + \gamma)r^2} \end{aligned}$$

dove $\gamma > 0$ è tale che $\lambda + \gamma = \frac{1}{4(T+\varepsilon)}$. Al crescere di r , $v(x, t)$ diventa piccola a piacere e in particolare

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} v(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} f.$$

Allora per $\mu \rightarrow 0^+$ si ha la tesi. \square

Osservazione 11.5.2. L'ipotesi (11.14) può essere indebolita richiedendo

$$u(x, t) \leq C e^{\lambda |x|^2} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T], \quad |x| > r_0$$

con C, λ, r_0 costanti positive.

Il Teorema 11.5.1 consente di stimare l'estremo superiore di una funzione u regolare in $\mathbb{R}^N \times]0, T]$ con l'estremo superiore di Hu e di $u(x, 0)$.

Corollario 11.5.3. (Stima a priori) Sia $u \in C_1^2(\mathbb{R}^N \times]0, T]) \cap C^0(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ tale che

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T] \quad |u(x, t)| \leq C e^{\lambda |x|^2} \quad (11.15)$$

con C, λ costanti positive. Risulta allora

$$\|u\|_{\infty, \mathbb{R}^N \times]0, T[} \leq \|f\|_{\infty, \mathbb{R}^N} + T \|Hu\|_{\infty, \mathbb{R}^N \times]0, T[}$$

dove $f(x) = u(x, 0)$.

Dimostrazione. Supponiamo $\|Hu\|_{\infty, \mathbb{R}^N \times]0, T[} < +\infty$ e $\|f\|_{\infty, \mathbb{R}^N} < +\infty$ (altrimenti la tesi è banale) e definiamo le funzioni (ausiliarie)

$$v(x, t) := u(x, t) - t \|Hu\|_{\infty, \mathbb{R}^N \times]0, T[},$$

$$w(x, t) := -u(x, t) - t \|Hu\|_{\infty, \mathbb{R}^N \times]0, T[}.$$

Le funzioni v, w introdotte soddisfano le ipotesi del Teorema 11.5.1, infatti si ha

$$Hv(x, t) = Hu(x, t) - \|Hu\|_{\infty, \mathbb{R}^N \times]0, T[} \leq 0$$

e anche

$$Hw(x, t) = -Hu(x, t) - \|Hu\|_{\infty, \mathbb{R}^N \times]0, T[} \leq 0$$

e inoltre, per l'ipotesi (11.15), $v(x, t) \leq C e^{\lambda |x|^2}$ e $w(x, t) \leq C e^{\lambda |x|^2}$. Pertanto, applicando il Teorema 11.5.1, risulta per la funzione v

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T] \quad v(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} f$$

da cui segue

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T] \quad u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} f + t \|Hu\|_{\infty, \mathbb{R}^N \times]0, T[} \leq \sup_{\mathbb{R}^N} f + T \|Hu\|_{\infty, \mathbb{R}^N \times]0, T[};$$

inoltre si ha, con procedimento analogo per la funzione w ,

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T] \quad -u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} f + T \|Hu\|_{\infty, \mathbb{R}^N \times]0, T[}$$

da cui è immediato dedurre la tesi. \square

Teorema 11.5.4. (Teorema di unicità della soluzione del Problema di Cauchy con crescita al più esponenziale)

Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione del calore non-omogenea

$$\begin{cases} Hu(x, t) = w(x, t) & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, T] \\ u(x, 0) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (P_w)$$

dove $w \in C^0(\mathbb{R}^N \times]0, T])$ e $f \in C^0(\mathbb{R}^N)$. Allora esiste al più una soluzione $u(x, t)$ del problema (P_w) tale che

$$u \in C_1^2(\mathbb{R}^N \times]0, T]) \cap C^0(\mathbb{R}^N \times [0, T])$$

e

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T] \quad |u(x, t)| \leq C e^{\lambda |x|^2}$$

con C, λ costanti positive.

Dimostrazione. Siano u^1, u^2 soluzioni del problema (P_w) tali da soddisfare le condizioni richieste nell'enunciato. Allora la funzione $v := u^1 - u^2$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} Hu(x, t) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, T[\\ u(x, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

e verifica la condizione di crescita (11.15). Per il Corollario 11.5.3 si ha pertanto $\|v\|_{\infty, \mathbb{R}^N \times]0, T[} \leq 0$ e quindi $v \equiv 0$. \square

Per quanto concerne l'unicità della soluzione per il Problema di Cauchy per l'equazione del calore su $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[$ vale il seguente risultato.

Teorema 11.5.5. Sia $u \in C_1^2(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[) \cap C^0(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$ soluzione del problema

$$\begin{cases} Hu(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Supponiamo inoltre che per ogni $\lambda > 0$ esiste $C > 0$ tale che

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty[\quad |u(x, t)| \leq C e^{\lambda |x|^2}, \quad |\nabla_x u(x, t)| \leq C e^{\lambda |x|^2}. \quad (11.16)$$

Allora u è identicamente nulla.

Dimostrazione. Siano $x^0 \in \mathbb{R}^N$ e $t_0 > 0$. Sia $r > 0$ tale che $x_0 \in B_r(0)$. Applicando il Lemma 11.4.5 con $\Omega = B_r(0)$ si ha, utilizzando la formula (11.13),

$$\begin{aligned} u(x^0, t_0) &= \int_0^{t_0} \int_{|\xi|=r} K_{t_0-t}(\xi - x^0) \nabla_\xi u(\xi, t) \cdot \frac{\xi}{r} d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) d\mathcal{L}^1(t) \\ &\quad - \int_0^{t_0} \int_{|\xi|=r} u(\xi, t) \nabla_\xi K_{t_0-t}(\xi - x^0) \cdot \frac{\xi}{r} d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) d\mathcal{L}^1(t) \\ &\quad + \int_{B_r(0)} u(x, 0) K_{t_0}(x - x^0) d\mathcal{L}^N(x) \end{aligned}$$

e quindi, ricordando che $u(x, 0) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} u(x^0, t_0) &= \int_0^{t_0} \int_{|\xi|=r} K_{t_0-t}(\xi - x^0) \nabla_\xi u(\xi, t) \cdot \frac{\xi}{r} d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) d\mathcal{L}^1(t) \\ &\quad - \int_0^{t_0} \int_{|\xi|=r} u(\xi, t) \nabla_\xi K_{t_0-t}(\xi - x^0) \cdot \frac{\xi}{r} d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) d\mathcal{L}^1(t). \end{aligned}$$

Passando al limite per $r \rightarrow +\infty$ e applicando le ipotesi (11.16) sulla funzione u risulta che gli integrali presenti a destra dell'uguaglianza tendono a zero e quindi $u(x^0, t_0) = 0$. \square

Come conseguenza del teorema precedente, con analoga argomentazione dimostrativa utilizzata per il Teorema 11.5.4, si ha il seguente risultato di unicità.

Teorema 11.5.6. *Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione del calore non-omogenea*

$$\begin{cases} Hu(x, t) = w(x, t) & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u(x, 0) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (11.17)$$

dove $w \in C^0(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[)$ e $f \in C^0(\mathbb{R}^N)$. Allora esiste al più una soluzione $u(x, t)$ del problema (11.17) che soddisfa le seguenti proprietà:

(i) $u \in C_1^2(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[) \cap C^0(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$;

(ii) per ogni $\lambda > 0$ esiste $C > 0$ tale che

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty[\quad |u(x, t)| \leq C e^{\lambda|x|^2}, \quad |\nabla_x u(x, t)| \leq C e^{\lambda|x|^2}.$$

11.6 Il Problema di Cauchy non-omogeneo per l'equazione del calore: Principio di Duhamel

Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione del calore **non-omogenea**

$$\begin{cases} Hu(x, t) = w(x, t) & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, T[\\ u(x, 0) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (P_w)$$

Dal punto di vista fisico $w(x, t)$ rappresenta una sorgente che emana calore nel punto x all'istante t .

Il principio di Duhamel consente la riduzione del problema non-omogeneo (P_w) a una famiglia di problemi per l'equazione del calore omogenea.

Si osservi che, per la linearità dell'operatore del calore, una soluzione del problema non-omogeneo (P_w) può essere ottenuta come somma di una soluzione del problema omogeneo

$$\begin{cases} Hu(x, t) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, T[\\ u(x, 0) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

e di una soluzione del problema non-omogeneo con dato iniziale nullo

$$\begin{cases} Hu(x, t) = w(x, t) & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, T[\\ u(x, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Enunciamo e proviamo quindi un risultato di esistenza per quest'ultimo problema.

Teorema 11.6.1. *Si consideri il problema di Cauchy non-omogeneo con dato iniziale nullo*

$$\begin{cases} Hu(x, t) = w(x, t) & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, T[\\ u(x, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (P_w^0)$$

Supponiamo che la funzione w verifichi le seguenti ipotesi:

(a) $w \in C^0(\mathbb{R}^N \times]0, T])$ e tale che

$$|w(x, t)| \leq C_0 e^{\beta|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, t \in]0, T[$$

con $C_0 > 0, \beta \geq 0$;

(b) w α -hölderiana sui compatti di \mathbb{R}^N .

Sia $v(x, t; s)$, per ogni $s \geq 0$, l'unica soluzione di classe $C_1^2(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v(x, t; s) - \Delta_x v(x, t; s) = 0 & x \in \mathbb{R}^N, t > s \\ v(x, s; s) = w(x, s) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (P_s)$$

data da

$$\begin{aligned} v(x, t; s) &= (w(\cdot, s) * K_{t-s}(\cdot))(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K_{t-s}(x-y) w(y, s) d\mathcal{L}^N(y) \\ &= (4\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} w(y, s) d\mathcal{L}^N(y). \end{aligned} \quad (11.18)$$

Allora l'applicazione

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t; s) d\mathcal{L}^1(s), \quad x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0 \quad (11.19)$$

è soluzione di classe $C_1^2(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ del problema (P_w^0) .

Si osservi che da (11.19) si ha

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (4\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} w(y, s) d\mathcal{L}^N(y) d\mathcal{L}^1(s)$$

e quindi l'integrando presenta una singolarità in $(y, s) = (x, t)$.

Per la dimostrazione del teorema 11.6.1 si farà uso di alcuni risultati che premettiamo.

Lemma 11.6.2. Sia $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$|u_0(x)| \leq C_0 e^{\beta|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

con $C_0, \beta > 0$.

Allora per la funzione $h(x, t) := \int_{\mathbb{R}^N} K_t(x - y) u_0(y) d\mathcal{L}^N(y)$ vale la seguente stima: per ogni $\rho > 0$ esiste una costante A (non dipendente da x e da t) tale che

$$|h(x, t)| \leq A \quad \forall x \in \overline{B}_\rho(0), \quad 0 < t < \frac{1}{8\beta}.$$

Dimostrazione. Effettuando il cambio di variabile $y - x = 2\sqrt{t}z$, osservato che $d\mathcal{L}^N(y) = (4t)^{\frac{N}{2}} d\mathcal{L}^N(z)$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} K_t(x - y) u_0(y) d\mathcal{L}^N(y) &= \int_{\mathbb{R}^N} (4t)^{\frac{N}{2}} K_t(2\sqrt{t}z) u_0(x + 2\sqrt{t}z) d\mathcal{L}^N(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (4t)^{\frac{N}{2}} (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-|z|^2} u_0(x + 2\sqrt{t}z) d\mathcal{L}^N(z) \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2} u_0(x + 2\sqrt{t}z) d\mathcal{L}^N(z). \end{aligned}$$

Pertanto, per l'ipotesi su u_0 , segue

$$|h(x, t)| \leq \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2} |u_0(x + 2\sqrt{t}z)| d\mathcal{L}^N(z) \leq \frac{C_0 e^{2\beta|x|^2}}{\pi^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2 + 8\beta t|z|^2} d\mathcal{L}^N(z)$$

dove si utilizza la disuguaglianza $|x + w|^2 \leq 2(|x|^2 + |w|^2)$ (vera per ogni $x, w \in \mathbb{R}^N$). Dalle ipotesi $|x| \leq \rho$ e $0 < t < \frac{1}{8\beta}$, osservato che $1 - 8\beta t > 0$, risulta

$$|h(x, t)| \leq \frac{C_0 e^{2\beta\rho^2}}{\pi^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-(1-8\beta t)|z|^2} d\mathcal{L}^N(z) = \frac{C_0 e^{2\beta\rho^2}}{\pi^{\frac{N}{2}}} \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{(1-8\beta t)^{\frac{N}{2}}}.$$

La tesi segue quindi per $A = \frac{C_0 e^{2\beta\rho^2}}{\vartheta^{\frac{N}{2}}}$ con $0 < \vartheta < 1 - 8\beta t$. \square

Corollario 11.6.3. Sia $w \in C^0(\mathbb{R}^N \times]0, T[)$ tale che

$$|w(x, t)| \leq C_0 e^{\beta|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, t \in]0, T[$$

con $C_0 > 0, \beta \geq 0$.

Posto

$$v(x, t; s) = (4\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} w(y, s) d\mathcal{L}^N(y)$$

l'applicazione

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t; s) d\mathcal{L}^1(s), \quad x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0$$

verifica i seguenti asserti:

- (i) $u(x, t)$ converge uniformemente rispetto a x sui compatti di \mathbb{R}^N ;
(ii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = 0$ uniformemente rispetto a x sui compatti di \mathbb{R}^N .

Dimostrazione. Si consideri

$$v(x, t; s) = \int_{\mathbb{R}^N} K_{t-s}(x-y) w(y, s) d\mathcal{L}^N(y), \quad x \in \mathbb{R}^N, t > s$$

Sia $\rho > 0$. Applicando il Lemma 11.6.2 con $h(x, t-s) = v(x, t; s)$ e $u_0(y) = w(y, s)$ si ha

$$|v(x, t; s)| \leq A \quad \forall x \in \overline{B}_\rho(0), \quad 0 < t-s < \frac{1}{8\beta}.$$

Si osservi che, per $t > 0$ (fissato) risulta (per ogni $x \in \mathbb{R}^N$)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t v(x, t; s) d\mathcal{L}^1(s) \right| &\leq \left| \int_0^{0 \vee (t - \frac{1}{8\beta})} v(x, t; s) d\mathcal{L}^1(s) \right| + \left| \int_{0 \vee (t - \frac{1}{8\beta})}^t v(x, t; s) d\mathcal{L}^1(s) \right| \\ &\leq \int_0^{0 \vee (t - \frac{1}{8\beta})} |v(x, t; s)| d\mathcal{L}^1(s) + \int_{0 \vee (t - \frac{1}{8\beta})}^t |v(x, t; s)| d\mathcal{L}^1(s). \end{aligned}$$

Senza perdere di generalità supponiamo $t - \frac{1}{8\beta} > 0$. Posto allora (controllare!)

$$B = \max_{(x,s) \in \overline{B}_\rho(0) \times [0, t - \frac{1}{8\beta}]} |v(x, t; s)|$$

e $C = \max\{A, B\}$ si ottiene per ogni $x \in \overline{B}_\rho(0), t > 0$

$$\left| \int_0^t v(x, t; s) d\mathcal{L}^1(s) \right| \leq \int_0^t C d\mathcal{L}^1(s) = C t$$

da cui seguono gli asserti (i) e (ii). \square

Lemma 11.6.4. Sia $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$|u_0(x)| \leq C_0 e^{\beta|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

con $C_0, \beta > 0$.

Supponiamo inoltre $u_0 \in C^{0,\alpha}(Q)$ per ogni Q sottoinsieme compatto di \mathbb{R}^N .

Allora per la funzione $h(x, t) := \int_{\mathbb{R}^N} K_t(x-y) u_0(y) d\mathcal{L}^N(y)$ vale la seguente stima:
per ogni $\rho > 0$ esiste una costante A (non dipendente da x e da t) tale che

$$|h_t(x, t)| + |\Delta_x h(x, t)| \leq A t^{\frac{\alpha}{2}-1} \quad \forall x \in \overline{B}_\rho(0), \quad 0 < t < \frac{1}{8\beta}.$$

Dimostrazione. Osservato che

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_t(x-y) d\mathcal{L}^N(y) = 1 \quad \text{per } t > 0$$

si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^N} K_t(x-y) d\mathcal{L}^N(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial t} K_t(x-y) d\mathcal{L}^N(y) = 0 \quad \text{per } t > 0$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial t} K_t(x-y) (u_0(y) - u_0(x)) d\mathcal{L}^N(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{-N}{2t} + \frac{|x-y|^2}{4t^2} \right) K_t(x-y) (u_0(y) - u_0(x)) d\mathcal{L}^N(y). \end{aligned}$$

La funzione h è soluzione dell'equazione del calore e pertanto $\left| \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) \right| = |\Delta_x h(x, t)|$.

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) \right| + |\Delta_x h(x, t)| &= 2 \left| \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) \right| \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{-N}{2t} + \frac{|x-y|^2}{4t^2} \right| K_t(x-y) |u_0(y) - u_0(x)| d\mathcal{L}^N(y) \\ &\leq 2N \int_{|y| < 2\rho} \left(\frac{1}{2t} + \frac{|x-y|^2}{4t^2} \right) K_t(x-y) |u_0(y) - u_0(x)| d\mathcal{L}^N(y) \\ &\quad + 2N \int_{|y| > 2\rho} \left(\frac{1}{2t} + \frac{|x-y|^2}{4t^2} \right) K_t(x-y) |u_0(y) - u_0(x)| d\mathcal{L}^N(y) \\ &= I + J \end{aligned}$$

dove I e J sono rispettivamente

$$\begin{aligned} I &:= 2N \int_{|y| < 2\rho} \left(\frac{1}{2t} + \frac{|x-y|^2}{4t^2} \right) K_t(x-y) |u_0(y) - u_0(x)| d\mathcal{L}^N(y), \\ J &:= 2N \int_{|y| > 2\rho} \left(\frac{1}{2t} + \frac{|x-y|^2}{4t^2} \right) K_t(x-y) |u_0(y) - u_0(x)| d\mathcal{L}^N(y). \end{aligned}$$

Se D è la costante di α -ölderianità di u_0 in $\overline{B}_{2\rho}$ si ha

$$I \leq 2ND \int_{|y| < 2\rho} \left(\frac{|x-y|^\alpha}{2t} + \frac{|x-y|^{2+\alpha}}{4t^2} \right) K_t(x-y) d\mathcal{L}^N(y).$$

Effettuando il cambio di variabile $y-x = 2\sqrt{t}z$, osservato che $d\mathcal{L}^N(y) = (4t)^{\frac{N}{2}} d\mathcal{L}^N(z)$ e $K_t(2\sqrt{t}z) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-|z|^2}$, ed estendendo l'integrale a \mathbb{R}^N si ha

$$\begin{aligned} I &\leq 2^{\alpha+1} N D \pi^{-\frac{N}{2}} t^{\frac{\alpha}{2}-1} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|z|^\alpha}{2} + |z|^{2+\alpha} \right) e^{-|z|^2} d\mathcal{L}^N(z) \\ &= \Theta(\alpha, \rho, N) t^{\frac{\alpha}{2}-1} \int_0^{+\infty} r^{N-1} \left(\frac{r^\alpha}{2} + r^{2+\alpha} \right) e^{-r^2} d\mathcal{L}^1(r) \end{aligned}$$

con l'ulteriore cambio di variabile $z = r\omega$, con $r = |z|$ e $\omega = 1$, mentre $\Theta(\alpha, \rho, N)$ è una costante dipendente da α, ρ, N .

Dalla convergenza dell'integrale a secondo membro segue che $I \leq A_1 t^{\frac{\alpha}{2}-1}$ dove A_1 è una costante non dipendente da x e t .

Per l'integrale J , dopo il cambio di variabile $y - x = 2\sqrt{t}z$, si procede analogamente alla dimostrazione del Lemma 11.6.2, ottenendo

$$J \leq \Psi(\alpha, \rho, N) \int_{|z| > \frac{\rho}{2\sqrt{t}}} \left(\frac{2|z|^2 + 1}{t} \right) e^{-\theta|z|^2} d\mathcal{L}^N(z)$$

con θ definito come nel Lemma 11.6.2.

Con il cambio di variabile $z = r\omega$, con $r = |z|$ e $\omega = 1$, si ha

$$\begin{aligned} J &\leq \Psi(\alpha, \rho, N) C(N) \int_{\frac{\rho}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} r^{N-1} \left(\frac{2r^2 + 1}{t} \right) e^{-\theta r^2} d\mathcal{L}^1(r) \\ &= \Psi(\alpha, \rho, N) C(N) t^{\frac{\alpha}{2}-1} \int_{\frac{\rho}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} r^{N-1} \left(\frac{2r^2 + 1}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \right) e^{-\theta r^2} d\mathcal{L}^1(r). \end{aligned}$$

Osservato che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\frac{\rho}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} r^{N-1} \left(\frac{2r^2 + 1}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \right) e^{-\theta r^2} d\mathcal{L}^1(r) = 0$$

(come si prova facilmente effettuando il cambio di variabili $r' = 2\sqrt{t}r$ e sfruttando l'uniforme convergenza a 0 per $r' \in [\rho, +\infty[$ dell'integrando così ottenuto) posto

$$A_2 = \Psi(\alpha, \rho, N) C(N) \sup_{t \in]0, \frac{1}{8\beta} - \varepsilon[} \int_{\frac{\rho}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} r^{N-1} \left(\frac{2r^2 + 1}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \right) e^{-\theta r^2} d\mathcal{L}^1(r)$$

si ha

$$J \leq A_2 t^{\frac{\alpha}{2}-1}$$

da cui si deduce la tesi. \square

Corollario 11.6.5. *Supponiamo che la funzione w verifichi le seguenti ipotesi:*

(a) $w \in C^0(\mathbb{R}^N \times]0, T])$ e tale che

$$|w(x, t)| \leq C_0 e^{\beta|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, t \in]0, T[$$

con $C_0 > 0, \beta \geq 0$;

(b) w α -hölderiana sui compatti di \mathbb{R}^N .

Posto

$$v(x, t; s) = (4\pi(t-s))^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} w(y, s) d\mathcal{L}^N(y)$$

risulta che gli integrali

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} v(x, t; s) d\mathcal{L}^1(s) \\ \int_0^t \Delta_x v(x, t; s) d\mathcal{L}^1(s) \end{aligned}$$

convergono uniformemente rispetto a x sui compatti di \mathbb{R}^N .

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del Corollario 11.6.3, tenuto conto che l'integrale

$$\int_a^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}-1} d\mathcal{L}^1(s), \quad 0 < a < t, \alpha \in]0, 1[$$

è convergente. \square

Proviamo ora il Teorema 11.6.1.

Dimostrazione del Teorema 11.6.1. Consideriamo l'applicazione

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t; s) d\mathcal{L}^1(s), \quad x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0.$$

Per i corollari 11.6.3 e 11.6.5 possiamo derivare sotto il segno di integrale, ottenendo

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t v(x, t; s) d\mathcal{L}^1(s) = \lim_{s \rightarrow t} v(x, t; s) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} v(x, t; s) d\mathcal{L}^1(s).$$

Ricordato che per ogni $s \in]0, t[$ la funzione v_s è soluzione del problema (P_s) si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= w(x, t) + \int_0^t \Delta_x v(x, t; s) d\mathcal{L}^1(s) \\ &= w(x, t) + \Delta_x \int_0^t v(x, t; s) d\mathcal{L}^1(s) \end{aligned}$$

dove per l'ultima uguaglianza si è utilizzato il corollario 11.6.5, e quindi risulta

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \Delta_x u(x, t) = w(x, t), \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, T[.$$

Inoltre dal corollario 11.6.3 si ha $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = 0$ uniformemente rispetto a x sui compatti di \mathbb{R}^N . La dimostrazione è pertanto completa. \square

Anche per la versione non-omogenea del problema misto (11.11) vale un risultato di unicità della soluzione, analogo al Teorema 11.4.3 (e con identica dimostrazione), che di seguito enunciamo.

Teorema 11.6.6. (*Unicità delle soluzioni nel problema misto non-omogeneo*)
Esiste al più una soluzione di classe $C_1^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ del problema misto

$$\begin{cases} Hu(x, t) = w(x, t) & \text{in } \Omega_T \\ u(x, t) = \varphi(x, t) & \text{su } \Sigma_T \end{cases}$$

dove $w \in C^0(\Omega_T)$ e $\varphi \in C^0(\Sigma_T)$.

11.7 Metodi dell'integrale dell'energia

Definizione 11.7.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Si definisce energia termica della distribuzione di temperatura u in Ω al tempo t l'integrale

$$e(t) = \int_{\Omega} u^2(x, t) d\mathcal{L}^N(x). \quad (11.20)$$

Teorema 11.7.2. (Unicità per il problema (omogeneo) retrogrado (backward))
Sia Ω aperto e limitato di \mathbb{R}^N con frontiera topologica $\partial\Omega$ regolare. Siano $u^1, u^2 \in C^2(\bar{\Omega}_T)$ soluzioni del problema

$$\begin{cases} Hu(x, t) = 0 & \text{in } \Omega_T \\ u(x, 0) = g(x) & \text{su } \partial\Omega \times [0, T] \end{cases}$$

con g funzione assegnata. Supponiamo inoltre che

$$u^1(x, T) = u^2(x, T) \quad \forall x \in \Omega.$$

Allora

$$u^1 \equiv u^2 \quad \text{in } \Omega_T.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $v := u^1 - u^2$, soluzione del problema

$$\begin{cases} Hv(x, t) = 0 & \text{in } \Omega_T \\ v(x, 0) = 0 & \text{su } \partial\Omega \times [0, T], \end{cases}$$

e sia

$$e(t) = \int_{\Omega} v^2(x, t) d\mathcal{L}^N(x) \quad 0 \leq t \leq T \quad (11.21)$$

l'energia termica associata a v . Risulta, essendo v soluzione dell'equazione del calore,

$$\frac{\partial}{\partial t} e(t) = 2 \int_{\Omega} v(x, t) \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) d\mathcal{L}^N(x) = 2 \int_{\Omega} v(x, t) \Delta_x v(x, t) d\mathcal{L}^N(x)$$

e integrando per parti, tenuto conto che $v = 0$ su $\partial\Omega$, si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} e(t) = -2 \int_{\Omega} |\nabla_x v(x, t)|^2 d\mathcal{L}^N(x).$$

Derivando sotto il segno di integrale e successivamente integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} e(t) &= -4 \int_{\Omega} \nabla_x v(x, t) \cdot \nabla_x \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) d\mathcal{L}^N(x) = 4 \int_{\Omega} \Delta_x v(x, t) \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) d\mathcal{L}^N(x) \\ &= 4 \int_{\Omega} \left(\Delta_x v(x, t) \right)^2 d\mathcal{L}^N(x). \end{aligned} \quad (11.22)$$

Dalle relazioni ottenute, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} e(t) \right)^2 &= 4 \left(\int_{\Omega} v(x, t) \Delta_x v(x, t) d\mathcal{L}^N(x) \right)^2 \\ &\leq \left(\int_{\Omega} v^2(x, t) d\mathcal{L}^N(x) \right) \left(4 \int_{\Omega} \left(\Delta_x v(x, t) \right)^2 d\mathcal{L}^N(x) \right) \end{aligned}$$

e quindi

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} e(t) \right)^2 \leq e(t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} e(t). \quad (11.23)$$

Per provare la tesi del teorema basta dimostrare che $e(t) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$. Procediamo per assurdo e supponiamo quindi che $e(t)$ non sia identicamente nulla. Osservato che $e(t) \geq 0$ e $e(T) = 0$ devono esistere $t_1, t_2 \in [0, T]$, $t_1 < t_2$, tali che

$$e(t) > 0 \text{ per ogni } t \in [t_1, t_2[, \quad e(t_2) = 0. \quad (11.24)$$

Considerata la funzione

$$f(t) = \log(e(t)), \quad t_1 \leq t < t_2$$

risulta

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) = \frac{1}{e(t)^2} \left(e(t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} e(t) - \left(\frac{\partial}{\partial t} e(t) \right)^2 \right) \geq 0$$

per la (11.23), e quindi f è una funzione convessa, cioè

$$\forall t \in]t_1, t_2[\quad \forall \lambda \in]0, 1[\quad f((1-\lambda)t_1 + \lambda t) \leq (1-\lambda) f(t_1) + \lambda f(t)$$

da cui segue

$$e((1-\lambda)t_1 + \lambda t) \leq e(t_1)^{1-\lambda} e(t)^\lambda.$$

Passando al limite per $t \rightarrow t_2$ risulta, per ogni $\lambda \in]0, 1[$,

$$e((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) \leq 0$$

o, equivalentemente,

$$e(t) \leq 0 \quad \forall t \in]t_1, t_2[$$

in contraddizione con la (11.24). □

Osservazione 11.7.3. Dal risultato precedente segue che se due distribuzioni di temperatura su Ω coincidono all'istante $T > 0$ ed assumono gli stessi valori al bordo nell'intervallo di tempo $[0, T]$ allora le due distribuzioni di temperatura sono uguali in Ω nell'intero periodo $[0, T]$.

11.8 Un'applicazione dell'equazione del calore ad un problema di finanza matematica

Presentiamo un'applicazione dell'equazione del calore alla valutazione del prezzo di un derivato finanziario, basandoci essenzialmente sui lavori di F. Black, M. Scholes e R.C. Merton pubblicati agli inizi degli anni settanta³⁵.

Robert Merton e Myron Scholes hanno ricevuto nel 1997 il Premio della Banca di Svezia per le scienze economiche in memoria di Alfred Nobel (Premio Nobel per l'economia) per i loro risultati (Fischer Black era scomparso prematuramente nel 1995).

Premettiamo una breve descrizione dei derivati finanziari.

I *derivati finanziari* sono contratti il cui valore dipende dalla quotazione di uno o più titoli o beni, detti *sottostanti*. Il *sottostante* può essere un'azione, un tasso di interesse, una merce (come oro, petrolio, ...) o anche un altro titolo derivato. Esempi tipici di titoli derivati sono le opzioni finanziarie.

Un'opzione finanziaria di tipo *call europea* è un contratto che conferisce al detentore (*holder*) il diritto (ma non l'obbligo) di acquistare l'attività sottostante ad una data futura prefissata T (scadenza) e ad un prezzo prefissato k (denominato *prezzo di esercizio* o *strike price*). Precisiamo che con l'acquisto di un'opzione si acquista un diritto, quindi il detentore di un'opzione call è anche libero di non esercitare il suo diritto ad acquistare il sottostante. Ovviamente chi ha venduto un'opzione call ha l'obbligo di vendere il sottostante.

Consideriamo un'opzione finanziaria call europea con prezzo di esercizio k e scadenza T . Indichiamo con X_T il prezzo del sottostante a scadenza. Il valore finale (payoff) alla scadenza T del contratto di opzione dipende dalla quotazione del titolo sottostante alla data T ; in particolare

- se $X_T > k$, il valore finale (payoff) dell'opzione è pari a $X_T - k$, corrispondente al ricavo che si ottiene esercitando l'opzione, ossia acquistando il sottostante al prezzo k e rivendendolo al prezzo di mercato X_T ;
- se $X_T \leq k$, non conviene esercitare l'opzione e il payoff è nullo.

Pertanto, il *payoff* a scadenza Y_T di una opzione finanziaria call europea è pari a

$$Y_T = \max \{X_T - k, 0\}.$$

Denotata con g la *funzione payoff* definita da $g(x) = \max \{x - k, 0\}$ il payoff si esprime

$$Y_T = g(X_T).$$

In Figura 11.2 è rappresentato il grafico del payoff come funzione di X_T . Osserviamo che il payoff aumenta con X_T ed offre un guadagno potenzialmente illimitato.

³⁵Cfr. **F. Black, M. Scholes:** *The Pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy 81, pp. 637–659, 1973.

R.C. Merton: *Theory of rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Management Sciences 4, pp. 141–183, 1973.

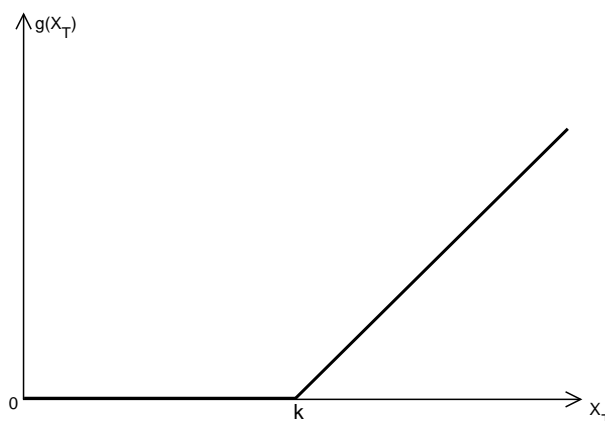


Figura 11.2: Payoff a scadenza per una opzione call europea con prezzo di esercizio k , come funzione del prezzo del sottostante

Riveste particolare importanza il problema della valutazione, ossia della determinazione del prezzo dell'opzione ad un istante $t < T$.

Denotiamo $v(x, t)$ il prezzo dell'opzione call europea all'istante $t \leq T$ in corrispondenza del prezzo del sottostante pari a x .

Ipotesi del modello di Black & Scholes. Il modello di valutazione di Black & Scholes è basato sulle seguenti ipotesi inerenti il mercato finanziario e la dinamica del prezzo dell'attività sottostante l'opzione:

- il mercato è aperto con continuità;
- il mercato è perfetto (assenza di costi di transazione e gravami fiscali, i titoli sono infinitamente divisibili, sono consentite le vendite allo scoperto) e privo di arbitraggi;
- il tasso istantaneo relativo agli investimenti non rischiosi (*tasso risk-free*), denotato con r , è noto e costante nel tempo;
- il processo (stocastico) ³⁶ $X = X(t, \omega)$ del prezzo del titolo sottostante soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica³⁷ (*moto Browniano geometrico*)

$$dX(t, \omega) = \mu X(t, \omega) dt + \sigma X(t, \omega) dW(t, \omega) \quad t \geq 0, \omega \in \Omega. \quad (11.25)$$

dove il tasso istantaneo di rendimento atteso $\mu \in \mathbb{R}$ (*coefficiente di drift*) e la *volatilità* (istantanea) $\sigma > 0$ sono supposti costanti, e $W = W(t, \omega)$ è un processo di Wiener³⁸ (o moto Browniano standard). Per comodità di notazione si denota $X_t = X(t, \cdot)$ il prezzo del sottostante all'istante t .

³⁶Assegnato uno spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) , si definisce processo stocastico una funzione $X : [0, +\infty[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, per ogni $t \geq 0$, la funzione $\omega \in \Omega \mapsto X(t, \omega) \in \mathbb{R}$ è una variabile aleatoria.

³⁷La soluzione dell'equazione differenziale stocastica con la condizione iniziale $X(0, \omega) = x_0 > 0$ è data da

$$X(t, \omega) = x_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t, \omega) \right\}.$$

Osserviamo che $X(t, \omega) > 0$. Si consulti, ad esempio,

B. Øksendal: *Stochastic differential equations*, Springer Berlin Heidelberg, 2003.

³⁸Un processo di Wiener (standard) W è un processo stocastico con le seguenti proprietà:

Sotto le precedenti assunzioni, si può dimostrare che il prezzo dell'opzione call deve soddisfare la seguente equazione differenziale alle derivate parziali di secondo ordine di tipo parabolico

$$\frac{\partial}{\partial t}v(x, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x, t) + r x \frac{\partial}{\partial x}v(x, t) - r v(x, t) = 0 \quad \text{in }]0, +\infty[\times]0, T[$$

che prende il nome di equazione generale di valutazione ed è nota come equazione di Black & Scholes.

Il problema della valutazione del prezzo di un'opzione call europea consiste nel risolvere la precedente equazione generale di valutazione sotto la *condizione a scadenza*:

$$v(x, T) = \max \{x - k, 0\} \quad x > 0,$$

dato che, alla data di scadenza, il prezzo dell'opzione è pari al suo payoff.

Pertanto il problema della valutazione del prezzo di un'opzione call europea può essere formulato nel modo seguente.

Problema della valutazione:

Determinare $v = v(x, t) \in C_1^2(]0, +\infty[\times]0, T]) \cap C^0(]0, +\infty[\times]0, T])$ soluzione del problema (retrogrado)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}v(x, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x, t) + r x \frac{\partial}{\partial x}v(x, t) - r v(x, t) = 0 & \text{in }]0, +\infty[\times]0, T[\\ v(x, T) = g(x) & x \in]0, +\infty[\end{cases} \quad (11.26)$$

dove il dato (finale) g è la funzione payoff $g(x) = \max \{x - k, 0\}$.

Sussiste una relazione tra l'equazione di Black & Scholes e l'equazione del calore, come si vedrà nella Proposizione 11.8.2 dove, utilizzando il cambio di variabili

$$x = e^{\sigma y}, \quad t = T - \tau$$

e un'opportuna trasformazione³⁹, il problema di determinare la soluzione del problema di valutazione (11.26) sarà ricondotto allo studio di un problema di Cauchy per l'equazione del calore.

Osservazione 11.8.1. Osserviamo che il cambio di variabile $t = T - \tau$ trasforma il problema retrogrado in un problema in avanti nel tempo. La variabile $\tau = T - t$ è il *tempo a scadenza* e rappresenta, all'istante t , la durata residua del contratto di opzione.

-
- $W(0, \cdot) = 0$ quasi certamente;
 - gli incrementi $W(s, \cdot) - W(t, \cdot)$, $t < s$, sono variabili aleatorie indipendenti;
 - gli incrementi sono stazionari;
 - per ogni $t < s$, l'incremento $W(s, \cdot) - W(t, \cdot)$ è una variabile aleatoria normale con media zero e varianza $s - t$;
 - per quasi ogni $\omega \in \Omega$ (fissato), la traiettoria $t \mapsto W(t, \omega)$ del processo è continua.

Si osservi che $W(t, \cdot) = W(t, \cdot) - W(0, \cdot)$ per ogni $t > 0$, e quindi $W(t, \cdot)$ ha legge normale con media 0 e varianza t .

³⁹Si userà la trasformazione proposta in

P. Wilmott, J. Dewynne and S. Howison: *Option Pricing. Mathematical models and computation*, Oxford Financial Press, 1993.

Proposizione 11.8.2. La funzione $v = v(x, t)$ è soluzione del problema di valutazione (11.26) con dato finale $g(x) = \max \{x - k, 0\}$ se e solo se la funzione $u = u(y, \tau)$ definita dalla trasformazione

$$u(y, \tau) = e^{Ay+B\tau} v(e^{\sigma y}, T - \tau), \quad y \in \mathbb{R}, \quad \tau \in [0, T] \quad (11.27)$$

con

$$A = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}, \quad B = r + \frac{A^2}{2},$$

è soluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} u(y, \tau) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(y, \tau) = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times]0, T] \\ u(y, 0) = f(y) & y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (11.28)$$

dove il dato iniziale f è definito da $f(y) = e^{Ay} g(e^{\sigma y})$.

Dimostrazione. Per la funzione $u = u(y, \tau)$ definita in (11.27) risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} u(y, \tau) &= e^{Ay+B\tau} \left(B v(e^{\sigma y}, T - \tau) - \frac{\partial}{\partial t} v(e^{\sigma y}, T - \tau) \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} u(y, \tau) &= e^{Ay+B\tau} \left(A v(e^{\sigma y}, T - \tau) + \sigma e^{\sigma y} \frac{\partial}{\partial x} v(e^{\sigma y}, T - \tau) \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(y, \tau) &= e^{Ay+B\tau} \left(A^2 v(e^{\sigma y}, T - \tau) + (2A\sigma + \sigma^2) e^{\sigma y} \frac{\partial}{\partial x} v(e^{\sigma y}, T - \tau) \right. \\ &\quad \left. + \sigma^2 e^{2\sigma y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(e^{\sigma y}, T - \tau) \right) \end{aligned}$$

e quindi, sostituendo $x = e^{\sigma y}$ e $t = T - \tau$, riesce

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} u(y, \tau) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(y, \tau) &= -e^{Ay+B\tau} \left(\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) \right. \\ &\quad \left. + \left(A\sigma + \frac{\sigma^2}{2} \right) x \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) - \left(B - \frac{A^2}{2} \right) v(x, t) \right). \end{aligned}$$

Scegliendo A e B tali che

$$A\sigma + \frac{\sigma^2}{2} = r, \quad B - \frac{A^2}{2} = r$$

cioè

$$A = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}, \quad B = r + \frac{A^2}{2}$$

si ha allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} u(y, \tau) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(y, \tau) &= -e^{Ay+B\tau} \left(\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) \right. \\ &\quad \left. + r x \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) - r v(x, t) \right). \end{aligned}$$

Pertanto la funzione v è soluzione dell'equazione di Black & Scholes in $]0, +\infty[\times]0, T[$ se e solo se la funzione u è soluzione dell'equazione del calore, con coefficiente di diffusione (cfr. (11.5)) $D = \frac{1}{2}$, in $\mathbb{R} \times]0, T]$. Inoltre dalla trasformazione (11.27) segue

$$u(y, 0) = e^{Ay} v(e^{\sigma y}, T)$$

e quindi v verifica la condizione a scadenza del problema (11.26) $v(x, T) = g(x)$ se e solo se u verifica la condizione iniziale del problema (11.28) $u(y, 0) = e^{Ay} g(e^{\sigma y}) = f(y)$. \square

Teorema 11.8.3. (Formula di Black & Scholes)

Il problema di valutazione (11.26) ha soluzione

$$v(x, t) = x \Phi(d_1) - k e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad (11.29)$$

dove Φ è la funzione di distribuzione della legge normale standard definita da

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\rho^2/2} d\mathcal{L}^1(\rho) \quad y \in \mathbb{R}$$

e

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{x}{k}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\log\left(\frac{x}{k}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Osservazione 11.8.4. La formula (11.29), che esprime il prezzo (o valore) di una opzione call europea con prezzo di esercizio k e scadenza T , è nota come formula di Black & Scholes.

In Figura 11.3 è rappresentato il grafico della funzione $x \mapsto v(x, t_0)$ che esprime il valore di una call europea, secondo la formula (11.29), come funzione del prezzo del sottostante x ad un istante $t_0 < T$ fissato.

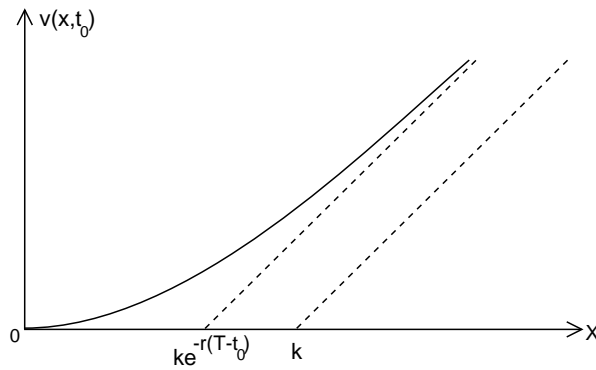


Figura 11.3: Prezzo di un'opzione call europea, ad un istante $t_0 < T$, come funzione del prezzo del sottostante x

Dimostrazione. Consideriamo il problema di Cauchy (11.28). Esso ha soluzione ⁴⁰

$$u(y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-z)^2}{2\tau}} f(z) d\mathcal{L}^1(z), \quad (11.34)$$

dove $f(x) = e^{Ax} \max\{e^{\sigma x} - k, 0\}$, con $A = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$. Effettuando il cambio di variabile $s = \frac{z-y}{\sqrt{\tau}}$ risulta

$$u(y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} f(y + \sqrt{\tau}s) d\mathcal{L}^1(s)$$

⁴⁰Sussiste il seguente risultato (cfr. [15]).

Teorema. Sia f una funzione con un numero finito di punti di discontinuità in \mathbb{R} , tale che

$$|f(x)| \leq c_1 e^{ax^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (11.30)$$

con c_1 e a costanti positive, e sia u definita da

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} K_D(x-z, t) f(z) d\mathcal{L}^1(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4Dt}} f(z) d\mathcal{L}^1(z) \quad (11.31)$$

dove $D > 0$ è il coefficiente di diffusione e $K_D(x, t)$ è la soluzione fondamentale (cfr. Osservazione 11.1.6)

$$K_D(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

Allora

(i) per ogni $T < \frac{1}{4Da}$ la funzione u è di classe $C_1^2(\mathbb{R} \times]0, T[)$ e

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times]0, T[;$$

(ii) se x_0 è un punto in cui f è continua, risulta

$$u(x, t) \rightarrow f(x_0) \quad \text{se } (x, t) \rightarrow (x_0, 0), t > 0;$$

(iii) esistono C, λ costanti positive tali che

$$|u(x, t)| \leq ce^{\lambda x^2} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, T[.$$

Dal precedente teorema segue che se $f \in C^0(\mathbb{R})$ allora la funzione u definita in (11.31) è soluzione di classe $C_1^2(\mathbb{R} \times]0, T[) \cap C^0(\mathbb{R} \times [0, T])$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times]0, T[\\ u(x, 0) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (11.32)$$

(Tale risultato può essere generalizzato a \mathbb{R}^N (cfr. [11] p. 210)).

Se, inoltre, per il dato iniziale f vale

$$|f(x)| \leq c_2 e^{b|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (11.33)$$

con c_2, b costanti positive, allora la condizione (11.30) è verificata per ogni $a > 0$ e quindi non vi è alcuna limitazione sull'intervallo temporale di esistenza della soluzione, essendo per ogni $T > 0$ la disuguaglianza $T < \frac{1}{4Da}$ soddisfatta con a sufficientemente piccolo.

Osservato che il problema (11.28) è un caso particolare del problema (11.32) con $D = 1/2$ e che il dato iniziale $f(x) = e^{Ax} \max\{e^{\sigma x} - k, 0\}$ soddisfa la condizione (11.33), risulta dunque che la funzione definita in (11.31) con $D = 1/2$ è soluzione del problema (11.28).

da cui, osservato che

$$f(y + \sqrt{\tau}s) = e^{A(y + \sqrt{\tau}s)} \max\{e^{\sigma(y + \sqrt{\tau}s)} - k, 0\}$$

$$= \begin{cases} e^{(A+\sigma)(y + \sqrt{\tau}s)} - k e^{A(y + \sqrt{\tau}s)} & \text{se } e^{\sigma(y + \sqrt{\tau}s)} - k \geq 0 \iff s \geq \frac{\log k - \sigma y}{\sigma \sqrt{\tau}} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

si ottiene per la soluzione (11.34) l'espressione

$$u(y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \sigma y}{\sigma \sqrt{\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{(A+\sigma)(y + \sqrt{\tau}s)} d\mathcal{L}^1(s) - \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \sigma y}{\sigma \sqrt{\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{A(y + \sqrt{\tau}s)} d\mathcal{L}^1(s).$$

Per la Proposizione 11.8.2, la funzione (cfr. (11.27))

$$v(x, t) = e^{-\frac{A}{\sigma} \log x - B(T-t)} u\left(\frac{1}{\sigma} \log x, T-t\right),$$

con $B = r + \frac{A^2}{2}$, è soluzione del problema (11.26). Sostituendo l'espressione per u determinata in precedenza, si ha

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{e^{-\frac{A}{\sigma} \log x - B(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \log x}{\sigma \sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{(A+\sigma)(\frac{1}{\sigma} \log x + s\sqrt{T-t})} d\mathcal{L}^1(s) \\ &\quad - \frac{k e^{-\frac{A}{\sigma} \log x - B(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \log x}{\sigma \sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{A(\frac{1}{\sigma} \log x + s\sqrt{T-t})} d\mathcal{L}^1(s) \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \log x}{\sigma \sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{(A+\sigma)s\sqrt{T-t}} e^{-B(T-t)} d\mathcal{L}^1(s) \\ &\quad - \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \log x}{\sigma \sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{As\sqrt{T-t}} e^{-B(T-t)} d\mathcal{L}^1(s) \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \log x}{\sigma \sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{(A+\sigma)s\sqrt{T-t}} e^{-B(T-t)} d\mathcal{L}^1(s) \\ &\quad - \frac{k e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \log x}{\sigma \sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{As\sqrt{T-t}} e^{-\frac{A^2}{2}(T-t)} d\mathcal{L}^1(s). \end{aligned}$$

Poniamo

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \log x}{\sigma \sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{(A+\sigma)s\sqrt{T-t}} e^{-B(T-t)} d\mathcal{L}^1(s)$$

e

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \log x}{\sigma \sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{As\sqrt{T-t}} e^{-\frac{A^2}{2}(T-t)} d\mathcal{L}^1(s).$$

Quindi

$$v(x, t) = x I_1 - k e^{-r(T-t)} I_2. \quad (11.35)$$

Calcoliamo prima I_1 . Osservato che

$$2B = 2r + A^2 = 2r + \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)^2 = \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)^2 = (A + \sigma)^2,$$

risulta

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \log x}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{(A+\sigma)s\sqrt{T-t}} e^{-B(T-t)} d\mathcal{L}^1(s) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \log x}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(s^2 - 2(A+\sigma)s\sqrt{T-t} + 2B(T-t))} d\mathcal{L}^1(s) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \log x}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(s - (A+\sigma)\sqrt{T-t})^2} d\mathcal{L}^1(s).
 \end{aligned}$$

Utilizzando il cambio di variabile $\rho = (A + \sigma)\sqrt{T-t} - s$, essendo

$$\begin{aligned}
 (A + \sigma)\sqrt{T-t} - \frac{\log k - \log x}{\sigma\sqrt{T-t}} &= \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t} - \frac{\log k - \log x}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
 &= \frac{\log\left(\frac{x}{k}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1,
 \end{aligned}$$

si ottiene

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\rho^2/2} d\mathcal{L}^1(\rho) = \Phi(d_1).$$

Calcoliamo I_2 . Risulta

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \log x}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{As\sqrt{T-t}} e^{-\frac{A^2}{2}(T-t)} d\mathcal{L}^1(s) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log k - \log x}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(s - A\sqrt{T-t})^2} d\mathcal{L}^1(s).
 \end{aligned}$$

Con il cambio di variabile $\rho = A\sqrt{T-t} - s$, osservato che

$$\begin{aligned}
 A\sqrt{T-t} - \frac{\log k - \log x}{\sigma\sqrt{T-t}} &= \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t} - \frac{\log k - \log x}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
 &= \frac{\log\left(\frac{x}{k}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_2,
 \end{aligned}$$

riesce

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\rho^2/2} d\mathcal{L}^1(\rho) = \Phi(d_2).$$

Sostituendo in (11.35) le espressioni per I_1 e I_2 così ottenute, risulta infine

$$v(x, t) = x \Phi(d_1) - k e^{-r(T-t)} \Phi(d_2).$$

□

Osservazione 11.8.5. La soluzione v del problema (11.26) data in (11.29) è unica nella classe delle funzioni che verificano la condizione di crescita

$$|v(x, t)| \leq C_1 e^{C_2(\log x)^2} \quad \forall (x, t) \in]0, +\infty[\times [0, T] \quad (11.36)$$

con C_1, C_2 costanti positive. Tale risultato si ottiene osservando che se v soddisfa (11.36) allora la funzione u definita in (11.27) verifica la condizione di crescita

$$|u(y, \tau)| \leq C e^{\lambda y^2} \quad \forall (y, \tau) \in \mathbb{R} \times [0, T],$$

con C, λ costanti positive, e questo garantisce, per il Teorema 11.5.4, l'unicità della soluzione del problema (11.28) e quindi anche del problema (11.26).

Osservazione 11.8.6. La soluzione v data in (11.29) non è, in generale, l'unica soluzione del problema di valutazione (11.26). Essa però è l'unica soluzione significativa da un punto di vista economico essendo, come osservato in precedenza, unica nella classe delle funzioni che verificano la condizione di crescita (11.36), che è una condizione economicamente ammissibile. Infatti, osservato che la funzione che compare a secondo membro della (11.36) cresce meno velocemente rispetto a una funzione esponenziale ma più velocemente di ogni funzione polinomiale, la condizione (11.36) è compatibile con le seguenti *condizioni agli estremi* (motivate da argomentazioni di carattere finanziario):

$$(i) \quad v(0, t) = 0 \text{ per } t \in [0, T];$$

$$(ii) \quad \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{v(x, t)}{x} = 1 \text{ per } t \in [0, T].$$

La condizione (i) deriva dal fatto che se ad un certo istante t il prezzo del sottostante X_t è pari a 0, l'equazione (11.25) implica che $X_s = 0$ per $s > t$ e quindi l'opzione è senza valore (in quanto il suo payoff è certamente pari a zero). La condizione (ii) è giustificata dalla forma della funzione payoff $g(x) = \max\{x - k, 0\}$ e dall'osservazione che quando il prezzo x diventa molto grande, l'ammontare del prezzo di esercizio $k > 0$ diventa sempre meno significativo.

CAPITOLO 12

L'equazione delle onde (o di d'Alembert (1747)) e alcuni problemi connessi

12.1 Il Problema di Cauchy per l'equazione delle onde unidimensionale

La più semplice equazione alle derivate parziali iperbolica è l'equazione delle onde unidimensionale

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (12.1)$$

dove u è una funzione di due variabili indipendenti $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$. La variabile x è comunemente identificata come “posizione” e t come “tempo”; c è una costante positiva. Fisicamente u può rappresentare lo spostamento normale delle particelle di una corda (infinita) vibrante.

Il problema di Cauchy per l'equazione delle onde unidimensionale può essere così formulato:

assegnate

$$\begin{array}{ll} f = f(x) & \text{in } \mathbb{R} \quad \text{“posizione all'istante } t = 0\text{”} \\ g = g(x) & \text{in } \mathbb{R} \quad \text{“velocità all'istante } t = 0\text{”} \end{array}$$

cercare $u = u(x, t)$ definita e regolare per $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$ ⁴¹ tale che

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times]0, +\infty[\\ u(x, 0) = f(x) & \text{in } \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (P)$$

⁴¹Anche per $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$. A differenza dell'operatore del calore, l'operatore delle onde è invariante rispetto all'inversione del tempo $(x, t) \rightarrow (x, -t)$. Pertanto è sufficiente studiare soluzioni in $t \geq 0$, perché risultati simili possono conseguirsi per $t \leq 0$, sostituendo t con $-t$.

Sussiste il seguente risultato:

Teorema 12.1.1. (Teorema di esistenza e unicità)

Siano $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$; allora il problema di Cauchy (P) ha un'unica soluzione $u = u(x, t) \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ data da

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) d\mathcal{L}^1(s) \quad (12.2)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

Dimostrazione. Preliminarmente supponiamo che una $u = u(x, t)$ esista e sia soluzione dell'equazione in (P). Introdotte le coordinate caratteristiche (metodo di d'Alembert)

$$\begin{aligned} \xi &= x + ct \\ \eta &= x - ct \end{aligned} \quad \left(\text{da cui} \quad \begin{aligned} x &= \frac{\xi + \eta}{2} \\ t &= \frac{\xi - \eta}{2c} \end{aligned} \right),$$

la $u(x, t)$ si trasforma in

$$U(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c}\right).$$

Si ha

$$U_\xi = \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2c}u_t$$

e

$$(U_\xi)_\eta = \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{1}{4c^2}u_{tt}$$

e quindi

$$U_{\xi\eta} = 0.$$

Allora, $U_\xi = F'(\xi)$ e

$$U(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

e ritornando alle coordinate (x, t) si ha

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

Evidentemente $u \in C^2$ se e solo se $F, G \in C^2$.

Allora la soluzione generale di (12.1) è ottenuta come sovrapposizione di due onde che si propagano, senza cambiare forma, con velocità c in direzioni opposte lungo l'asse x . Imposte le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x, 0) = F(x) + G(x) & (\text{e quindi } cf'(x) &= cF'(x) + cG'(x)) , \\ g(x) &= u_t(x, 0) = cF'(x) - cG'(x) , \end{aligned}$$

otteniamo (per addizione e sottrazione)

$$cf'(x) + g(x) = 2cF'(x)$$

$$cf'(x) - g(x) = 2cG'(x) ,$$

da cui

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2c}g(x) \\ G'(x) &= \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2c}g(x), \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) d\mathcal{L}^1(s) + \delta \quad (\delta \in \mathbb{R}) \\ G(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) d\mathcal{L}^1(s) + \sigma \quad (\sigma \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Poiché $f(x) = F(x) + G(x)$, necessariamente $\delta + \sigma = 0$ e in definitiva:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x + ct) + G(x - ct) \\ &= \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s) d\mathcal{L}^1(s) + \delta \\ &\quad + \frac{1}{2}f(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s) d\mathcal{L}^1(s) + \sigma \\ &= \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) d\mathcal{L}^1(s). \end{aligned}$$

Se $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$ la $u = u(x, t)$ così determinata (euristicamente) è di classe $C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ ed è la soluzione del problema (P). Infatti:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ u_t(x, t) &= \frac{1}{2}[cf'(x + ct) - cf'(x - ct)] + \frac{1}{2c}[cg(x + ct) + cg(x - ct)], \\ u_t(x, 0) &= \frac{c}{2}f'(x) - \frac{c}{2}f'(x) + \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}g(x) = g(x), \\ u_{tt}(x, t) &= \frac{1}{2}[c^2f''(x + ct) + c^2f''(x - ct)] + \frac{1}{2c}[c^2g'(x + ct) - c^2g'(x - ct)], \\ u_x(x, t) &= \frac{1}{2}[f'(x + ct) + f'(x - ct)] + \frac{1}{2c}[g(x + ct) - g(x - ct)], \\ u_{xx}(x, t) &= \frac{1}{2}[f''(x + ct) + f''(x - ct)] + \frac{1}{2c}[g'(x + ct) - g'(x - ct)], \end{aligned}$$

e quindi

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = 0.$$

□

Osservazione 12.1.2. (i) Nel caso $N = 1$ la soluzione $u = u(x, t)$ **non è meno regolare** dei dati $f = f(x)$ e $g = g(x)$.

(ii) La soluzione $u = u(x, t)$ è determinata univocamente dai valori dei dati f e g nell'intervallo $[x - ct, x + ct]$, il quale rappresenta l'**intervallo di dipendenza** (dai dati iniziali) per la soluzione nel punto (x, t) .

(iii) Se assumiamo che $\|f\|_{\infty, \mathbb{R}}, \|g\|_{\infty, \mathbb{R}} < \varepsilon$, per qualche $\varepsilon \in (0, 1)$, allora dalla (12.2) si ha $\|u(\cdot, t)\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq (1 + t)\varepsilon$ (dipendenza continua della soluzione dai dati f e g).

12.2 I movimenti di una corda con gli estremi fissi

Un problema rilevante relativo all'equazione delle onde unidimensionale si ottiene ponendosi in un intervallo limitato: in questo caso è appropriato definire, oltre alle condizioni iniziali, delle condizioni ai limiti (ovvero specificare i movimenti degli estremi dell'onda, che in questo caso sarà assimilata ad una corda).

Consideriamo quindi il problema di una corda omogenea con gli estremi fissi (le condizioni ai limiti sono pertanto indipendenti dal tempo) e della quale sono note posizione e velocità iniziali.

Il problema è definito da (qui prendiamo $c = 1$)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in }]0, L[\times]0, +\infty[\\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t \in [0, +\infty[\\ u(x, 0) = f(x) & x \in [0, L] \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in [0, L] \end{cases} \quad (12.3)$$

con $f \in C^2([0, L])$, $g \in C^1([0, L])$.

Per risolvere il problema (12.3) cerchiamo soluzioni a variabili separate del tipo $u(x, t) = \varphi(x) \psi(t)$. Una scelta di questo tipo trasforma l'equazione in

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi''(t)}{\psi(t)}.$$

Il membro a sinistra è indipendente da t , il membro a destra è indipendente da x , dunque entrambi i membri devono essere uguali alla stessa costante, diciamo $-\lambda$, quindi

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \frac{\psi''}{\psi} = -\lambda$$

e pertanto il problema si spezza in due equazioni, una delle quali soggetta alle condizioni ai limiti:

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda \varphi = 0 \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi(L) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \psi'' + \lambda \psi = 0. \end{cases}$$

Al fine di risolvere il primo sistema bisogna innanzitutto stabilire per quali valori di λ le condizioni ai limiti sono soddisfacenti da φ non identicamente nulla: questi λ prendono il nome di **autovalori** e le corrispondenti soluzioni sono chiamate **autofunzioni**. Posto $\lambda = \gamma^2$ otteniamo soluzioni del tipo

$$\varphi(x) = c_1 \sin \gamma x + c_2 \cos \gamma x.$$

Affinché le soluzioni non siano banali, risulta $c_2 = 0$ dalla condizione sul primo estremo e $\gamma = \frac{n\pi}{L}$; gli autovalori sono pertanto positivi e in particolare non nulli, in

quanto sono del tipo $\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, con $n \in \mathbb{N}$.

La seconda equazione non è soggetta a condizioni iniziali, e quindi, combinando la ψ e la φ trovate e tenendo conto della linearità del problema otteniamo la soluzione formale

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left[a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right]. \quad (12.4)$$

Pertanto il movimento di una corda omogenea i cui estremi sono fissi è dato dalla composizione delle autofunzioni che sono anche chiamate **autovibrazioni**: a queste sono associati gli autovalori, anche chiamati **autofrequenze**.

Per imporre le condizioni iniziali si sfrutta il fatto che le autofunzioni $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ costituiscono un sistema ortogonale completo in $L^2([0, L])$: risolvere il problema della corda omogenea con gli estremi fissi significa quindi stabilire i coefficienti di Fourier delle soluzioni trovate mediante la separazione delle variabili in modo che siano soddisfatte le condizioni iniziali, che possono essere sviluppate come

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{n\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

con

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) f(x) d\mathcal{L}^1(x)$$

e

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) g(x) d\mathcal{L}^1(x).$$

La serie (12.4) con i coefficienti a_n e b_n così determinati rappresenta la soluzione del problema (12.3).

12.3 Equipartizione dell'energia

Consideriamo il problema della propagazione ondosa di una corda (infinita) vibrante:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times]0, +\infty[\\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (12.5)$$

con $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$.

Sia $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ la soluzione del problema (12.5) e sia

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (u_t^2(x, t) + c^2 u_x^2(x, t)) d\mathcal{L}^1(x).$$

l'energia dell'onda u all'istante t .

Definizione 12.3.1. Si definisce energia cinetica dell'onda u all'istante t l'integrale

$$e_{\text{cin}}(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t^2(x, t) d\mathcal{L}^1(x)$$

ed energia potenziale dell'onda u all'istante t l'integrale

$$e_{\text{pot}}(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} c^2 u_x^2(x, t) d\mathcal{L}^1(x).$$

Dalla precedente definizione risulta ovviamente

$$e(t) = e_{\text{cin}}(t) + e_{\text{pot}}(t).$$

Se i dati iniziali del problema della propagazione delle onde sono nulli fuori da un compatto sussiste il seguente risultato.

Teorema 12.3.2. (Equipartizione e conservazione dell'energia)

Sia $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ la soluzione del problema (12.5).

Supponiamo che $f \in C_0^2(\mathbb{R})$, $g \in C_0^1(\mathbb{R})$. Allora

(i) esiste $T > 0$ tale che per ogni $t > T$ risulta

$$e_{\text{cin}}(t) = e_{\text{pot}}(t);$$

(ii) l'energia $e(t)$ è costante nel tempo.

Dimostrazione.

(i) L'unica soluzione $u = u(x, t) \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ del problema (12.5) è data da (Teorema 12.1.1)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) d\mathcal{L}^1(s) \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (12.6)$$

Osservato che

$$u_t(x, t) = \frac{1}{2} [cf'(x+ct) - cf'(x-ct)] + \frac{1}{2c} [cg(x+ct) + cg(x-ct)]$$

e

$$u_x(x, t) = \frac{1}{2} [f'(x+ct) + f'(x-ct)] + \frac{1}{2c} [g(x+ct) - g(x-ct)],$$

si ha

$$\begin{aligned} e_{\text{cin}}(t) - e_{\text{pot}}(t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (u_t^2(x, t) - c^2 u_x^2(x, t)) d\mathcal{L}^1(x) \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (-c^2 f'(x+ct) f'(x-ct) + g(x+ct) g(x-ct)) d\mathcal{L}^1(x). \end{aligned}$$

Per ipotesi esiste un intervallo $[a, b]$ tale che f e g sono nulle fuori da tale intervallo. Posto

$$T = \frac{b-a}{2c},$$

per $t > T$ risulta che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $x-ct < a$ o $x+ct > b$ e quindi l'integrale che compare nell'ultima espressione è nullo, da cui segue l'asserto (i).

(ii) Integrando per parti il termine

$$\int_{-R}^R c^2 u_t u_{xx} d\mathcal{L}^1(x)$$

e ricordando che la funzione u è soluzione dell'equazione della corda vibrante si ha, per $R > 0$,

$$\begin{aligned} &\int_{-R}^R (u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt}) d\mathcal{L}^1(x) = \\ &= \int_{-R}^R u_t (u_{tt} - c^2 u_{xx}) d\mathcal{L}^1(x) + c^2 [u_x(R, t) u_t(R, t) - u_x(-R, t) u_t(-R, t)] \\ &= c^2 [u_x(R, t) u_t(R, t) - u_x(-R, t) u_t(-R, t)]. \end{aligned}$$

Passando al limite per $R \rightarrow +\infty$, osservato che dall'espressione (12.6) segue che u è costante per R sufficientemente grande essendo f e g nulle fuori da un compatto, si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} e(t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R (u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt}) d\mathcal{L}^1(x) = 0$$

e quindi $e(t) = e(0)$ per ogni $t > 0$. \square

12.4 Medie sferiche ed Equazione di Darboux

Sia $h \in C^0(\mathbb{R}^N)$; fissata una sfera $\partial B_r(x)$, poniamo

$$M_h(x, r) := \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{|y-x|=r} h(y) d\mathcal{H}^{N-1}(y)$$

(media sferica di h , sulla sfera di centro x e raggio $r > 0$).

Posto $y = x + r\xi$ con $|\xi| = 1$, si ha

$$M_h(x, r) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{|\xi|=1} h(x + r\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi),$$

allora possiamo ragionevolmente estendere la definizione di $M_h(x, r)$ per $r < 0$, ponendo per $r < 0$

$$M_h(x, r) = M_h(x, -r) \quad (\text{estensione "pari" rispetto ad } r),$$

osservato che

$$\int_{|\xi|=1} h(x+r\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) = \int_{|\xi|=1} h(x-r(-\xi)) d\mathcal{H}^{N-1}(-\xi) = \int_{|\xi|=1} h(x-r\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi).$$

Inoltre, conoscendo $(x, r) \mapsto M_h(x, r)$, conosciamo anche $x \mapsto h(x)$, in quanto si ha

$$M_h(x, 0) = h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

È evidente che se $h \in C^k(\mathbb{R}^N)$ allora $M_h(x, r) \in C^k(\mathbb{R}^{N+1})$.

Proposizione 12.4.1. *Se $h \in C^2(\mathbb{R}^N)$, allora $M_h(x, r)$ soddisfa l'equazione di Darboux*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_h(x, r) = \Delta_x M_h(x, r),$$

e verifica le condizioni iniziali

$$M_h(x, 0) = h(x), \quad \left[\frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r) \right]_{r=0} = 0.$$

Dimostrazione. Per il teorema della divergenza (posto $y = x + r\xi$ con $|\xi| = 1$) si ha

$$\begin{aligned} \int_{|y-x|<r} \Delta h(y) d\mathcal{L}^N(y) &= \int_{|y-x|=r} \nabla h(y) \cdot \xi d\mathcal{H}^{N-1}(y) \\ &= r^{N-1} \int_{|\xi|=1} \nabla h(x + r\xi) \cdot \xi d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\ &= r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} \int_{|\xi|=1} h(x + r\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi), \end{aligned}$$

perciò,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r) &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{N\omega_N} \int_{|\xi|=1} h(x + r\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \right] \\ &= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{|y-x|<r} \Delta h(y) d\mathcal{L}^N(y) \\ &= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_0^r \varrho^{N-1} \left(\Delta_x \int_{|\xi|=1} h(x + \varrho\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \right) d\mathcal{L}^1(\varrho) \\ &= \frac{1}{r^{N-1}} \Delta_x \int_0^r M_h(x, \varrho) \varrho^{N-1} d\mathcal{L}^1(\varrho), \end{aligned}$$

quindi

$$r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r) = \Delta_x \int_0^r M_h(x, \varrho) \varrho^{N-1} d\mathcal{L}^1(\varrho),$$

e derivando rispetto ad r si ha

$$(N-1)r^{N-2} \frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r) + r^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial r^2} M_h(x, r) = \Delta_x [M_h(x, r)r^{N-1}]$$

da cui, dividendo per r^{N-1} , segue l'equazione di Darboux.

Si è già osservato che

$$M_h(x, 0) = h(x);$$

inoltre, tenuto conto che la soluzione $M_h(x, r)$ dell'equazione di Darboux è pari rispetto ad r , abbiamo

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r) \right]_{r=0} = 0.$$

□

12.5 Metodo di Poisson delle medie sferiche ed equazione di Eulero-Poisson-Darboux

Consideriamo ora il problema di Cauchy per l'equazione delle onde (di d'Alembert) in dimensione (spaziale) $N \geq 2$:

$$\begin{cases} \square u := u_{tt} - c^2 \Delta_x u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u(x, 0) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (P)$$

Questo problema può essere risolto col **metodo di Poisson delle medie sferiche** se $N \geq 2$.

Illustriamo questo metodo: procediamo euristicamente e supponiamo che esista $u = u(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$ soluzione di (P). Consideriamo le medie sferiche di u come funzione di x (e vediamo che possiamo trasformare il problema di Cauchy (P) in un problema di Cauchy per una equazione iperbolica nelle due variabili reali indipendenti r e t (equazione di Eulero-Poisson-Darboux)):

$$M_u(x, r, t) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{|\xi|=1} u(x + r\xi, t) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi);$$

per la proposizione 12.4.1 M_u soddisfa l'equazione di Darboux

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u(x, r, t) = \Delta_x M_u(x, r, t).$$

Ora

$$\begin{aligned} \Delta_x M_u(x, r, t) &= \frac{1}{N\omega_N} \int_{|\xi|=1} \Delta_x u(x + r\xi, t) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\ \left(\begin{array}{l} \text{essendo } u \text{ soluzione dell'equa-} \\ \text{zione di d'Alembert in (P)} \end{array} \right) &= \frac{1}{N\omega_N} \int_{|\xi|=1} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x + r\xi, t) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{N\omega_N} \int_{|\xi|=1} u(x + r\xi, t) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \right] \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(x, r, t), \end{aligned}$$

e, quindi, dall'equazione di Darboux si ha:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u(x, r, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(x, r, t),$$

cioè

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(x, r, t) - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u(x, r, t) = 0 \quad (\text{per ogni } x \text{ fissato in } \mathbb{R}^N)$$

(equazione di Eulero-Poisson-Darboux, che dipende dalla dimensione N).

Tenuto conto delle condizioni iniziali in (P) si ha:

$$\begin{aligned} M_u(x, r, 0) &= \frac{1}{N\omega_N} \int_{|\xi|=1} u(x + r\xi, 0) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\ &= \frac{1}{N\omega_N} \int_{|\xi|=1} f(x + r\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\ &= M_f(x, r); \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} M_u(x, r, t) \right]_{t=0} &= \frac{1}{N\omega_N} \int_{|\xi|=1} \frac{\partial}{\partial t} u(x + r\xi, 0) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\ &= \frac{1}{N\omega_N} \int_{|\xi|=1} g(x + r\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\ &= M_g(x, r). \end{aligned}$$

In definitiva $u = u(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$ è soluzione di (P) se e solo se $M_u(x, r, t)$, per ogni fissato $x \in \mathbb{R}^N$, è soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(x, r, t) - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u(x, r, t) = 0 \\ M_u(x, r, 0) = M_f(x, r) \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} M_u(x, r, t) \right]_{t=0} = M_g(x, r). \end{cases} \quad (P')$$

12.6 Il Problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione (spaziale) $N = 3$

Nel caso $N = 3$ (moto di onde acustiche o ottiche), da (P') si ha:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(x, r, t) - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u(x, r, t) = 0$$

e moltiplicando per r :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[r M_u(x, r, t) \right] - c^2 \underbrace{\left(r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u(x, r, t)}_{= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[r M_u(x, r, t) \right]} = 0,$$

e quindi $r M_u(x, r, t)$, come funzione di r e t , è soluzione dell'equazione delle onde unidimensionale con dati iniziali

$$r M_u(x, r, 0) = r M_f(x, r)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} r M_u(x, r, t) \right]_{t=0} = r M_g(x, r).$$

Allora, dalla formula (12.2) di d'Alembert (caso unidimensionale) si ha:

$$r M_u(x, r, t) = \frac{1}{2} \left[(r+ct) M_f(x, r+ct) + (r-ct) M_f(x, r-ct) \right] + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} s M_g(x, s) d\mathcal{L}^1(s).$$

Usando il fatto che $M_f(x, r)$ e $M_g(x, r)$ sono pari in r , si ha:

$$M_u(x, r, t) = \frac{(ct+r) M_f(x, ct+r) - (ct-r) M_f(x, ct-r)}{2r} + \frac{1}{2rc} \int_{ct-r}^{ct+r} s M_g(x, s) d\mathcal{L}^1(s)$$

$$\left(\text{perché } \int_{r-ct}^{r+ct} \underbrace{s M_g(x, s) d\mathcal{L}^1(s)}_{\text{dispari in } s} = \underbrace{\int_{r-ct}^{ct-r} s M_g(x, s) d\mathcal{L}^1(s)}_{=0} + \int_{ct-r}^{ct+r} s M_g(x, s) d\mathcal{L}^1(s) \right).$$

Passando al limite per $r \rightarrow 0$

$$M_u(x, 0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[t M_f(x, ct) \right] + t M_g(x, ct),$$

e poiché

$$M_u(x, 0, t) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{|\xi|=1} u(x, t) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) = u(x, t),$$

si ha

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[tM_f(x, ct) \right] + tM_g(x, ct).$$

In definitiva se $u = u(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty[)$ è soluzione del problema di Cauchy (P), essa si rappresenta così:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[tM_f(x, ct) \right] + tM_g(x, ct) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[t \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} f(y) d\mathcal{H}^2(y) \right] + t \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} g(y) d\mathcal{H}^2(y) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} f(y) d\mathcal{H}^2(y) \right] + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} g(y) d\mathcal{H}^2(y). \end{aligned} \quad (12.7)$$

Se in (12.7) si effettua il cambiamento di variabile $y = x + ct\xi$ con $|\xi| = 1$ (in modo da poter derivare rispetto a t sotto il segno di integrale) si ha:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi} \int_{|\xi|=1} f(x + ct\xi) d\mathcal{H}^2(\xi) \right] + \frac{t}{4\pi} \int_{|\xi|=1} g(x + ct\xi) d\mathcal{H}^2(\xi) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} f(x + ct\xi) d\mathcal{H}^2(\xi) + \frac{t}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \frac{\partial}{\partial t} f(x + ct\xi) d\mathcal{H}^2(\xi) \\ &\quad + \frac{t}{4\pi} \int_{|\xi|=1} g(x + ct\xi) d\mathcal{H}^2(\xi) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} f(x + ct\xi) d\mathcal{H}^2(\xi) + \frac{t}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \sum_{j=1}^3 f_{y_j}(x + ct\xi) c\xi_j d\mathcal{H}^2(\xi) \\ &\quad + \frac{t}{4\pi} \int_{|\xi|=1} g(x + ct\xi) d\mathcal{H}^2(\xi), \end{aligned}$$

cioè

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} \left[f(y) + \sum_{j=1}^3 f_{y_j}(y)(y_j - x_j) + t g(y) \right] d\mathcal{H}^2(y). \quad (12.8)$$

Le formule (12.7)-(12.8) sono dovute a Kirchoff.

Viceversa, sussiste il seguente

Teorema 12.6.1. (Teorema di esistenza e unicità)

Siano $f = f(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $g = g(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$; allora

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[t M_f(x, ct) \right] + t M_g(x, ct)$$

è l'unica soluzione di classe $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty[)$ del problema di Cauchy (P) in dimensione $N = 3$.

Dimostrazione. Chiaramente $u(x, t)$ data da (12.7) è di classe $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty[)$.

Da

$$u(x, t) = M_f(x, ct) + t \frac{\partial}{\partial t} M_f(x, ct) + t M_g(x, ct)$$

si ha

$$u(x, 0) = M_f(x, 0) = f(x),$$

$$u_t(x, t) = 2 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} M_f(x, ct)}_{\text{dispari in } t} + t \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_f(x, ct) + M_g(x, ct) + t \frac{\partial}{\partial t} M_g(x, ct),$$

$$u_t(x, 0) = M_g(x, 0) = g(x);$$

essendo l'operatore di d'Alembert $\square := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_x$ lineare, per provare che

$$\square u(x, t) = 0$$

è sufficiente provare che $\square [t M_g(x, ct)] = 0$ e $\square \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [t M_f(x, ct)] \right\} = 0$. Infatti, posto $r = ct$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [t M_g(x, ct)] &= c \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r M_g(x, r)] \\ \left(\begin{array}{l} \text{dall'equazione di Darboux} \\ \text{in dimensione } N = 3 \end{array} \right) &= c \Delta_x [r M_g(x, r)] \\ &= c r \Delta_x M_g(x, r) \\ &= c^2 \Delta_x [t M_g(x, ct)] \end{aligned}$$

e quindi

$$\square [t M_g(x, ct)] = 0.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [t M_f(x, ct)] \right\} &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} [t M_f(x, ct)] \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ c^2 \Delta_x [t M_f(x, ct)] \right\} \\ &= c^2 \Delta_x \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [t M_f(x, ct)] \right\}, \end{aligned}$$

da cui

$$\square \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [t M_f(x, ct)] \right\} = 0.$$

□

Osservazione 12.6.2. (i) A differenza del caso $N = 1$, nel caso $N = 3$ si ha che per la soluzione u si può verificare la **perdita di almeno un ordine di derivazione**, rispetto alla regolarità dei dati.

- (ii) **Principio di Huygens nel caso $N = 3$.** Dalla (12.8) si deduce che $u(x, t)$ dipende *solo* dai valori di f , delle sue derivate parziali prime e da g sulla **sfera di centro x e raggio ct , $|y - x| = ct$ (dominio di dipendenza)**.
Ciò dà luogo al principio di Huygens: un segnale (acustico o ottico) concentrato in un punto x all'istante $t = 0$ è concentrato all'istante $t > 0$ sulla sfera di centro x e raggio ct .

In particolare, un ascoltatore alla distanza d da uno strumento musicale ascolta esattamente ciò che è stato suonato all'istante $t - \frac{d}{c}$, piuttosto che una mistura di tutte le note emesse fino a quell'istante.

- (iii) **Decadimento per tempi lunghi.** Mentre il supporto della soluzione con dati iniziali a supporto compatto si espande, la soluzione decade nel tempo: per $t \rightarrow +\infty$ si ha $u(x, t) \rightarrow 0$.
Precisamente se i dati g , f e le sue derivate parziali prime, sono limitati e a supporto compatto, allora $u(x, t) \rightarrow 0$ al più come $\frac{1}{t}$ per $t \rightarrow +\infty$ (cfr. (12.8)).

12.7 Il Problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione (spaziale) $N = 2$ (Metodo della discesa di Hadamard)

Con il metodo della discesa di Hadamard, soluzioni di una equazione alle derivate parziali sono ottenute considerandole come soluzioni speciali di un'altra equazione che coinvolge più variabili indipendenti, e che può essere risolta.

Così una soluzione $u(x_1, x_2, t)$ del problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione (spaziale) $N = 2$ (*moto di onde su uno specchio d'acqua*), può essere riguardata come una soluzione dello stesso problema in dimensione $N = 3$ che non dipende da x_3 .

Allora $u(x_1, x_2, t)$ è data dalla formula (12.7) per $x_3 = 0$ con

$$f(y) = f(y_1, y_2), \quad g(y) = g(y_1, y_2),$$

gli integrali di superficie essendo estesi sulla sfera (di centro $(x_1, x_2, 0)$ e raggio ct)
 $|y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + y_3^2} = ct$:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, t) \equiv u(x_1, x_2, 0, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} f(y_1, y_2) d\mathcal{H}^2(y_1, y_2, y_3) \right] + \\ &+ \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} g(y_1, y_2) d\mathcal{H}^2(y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

Osservato che sulla semisfera (cartesiana) si ha

$$d\mathcal{H}^2(y_1, y_2, y_3) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\right)^2} d\mathcal{L}^2(y_1, y_2) = \frac{ct}{|y_3|} d\mathcal{L}^2(y_1, y_2),$$

e che i punti (y_1, y_2, y_3) e $(y_1, y_2, -y_3)$ danno lo stesso contributo agli integrali, si ottiene:

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi c} \int_{r < ct} \frac{f(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} d\mathcal{L}^2(y_1, y_2) \right] + \frac{1}{2\pi c} \int_{r < ct} \frac{g(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} d\mathcal{L}^2(y_1, y_2)$$

dove $r = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$.

Sussiste quindi il seguente

Teorema 12.7.1. (Teorema di esistenza e unicità)

Siano $f = f(x_1, x_2) \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $g = g(x_1, x_2) \in C^2(\mathbb{R}^2)$; allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \times]0, +\infty[\\ u(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2) & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ u_t(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2) & \text{in } \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (P)$$

ha un'unica soluzione $u = u(x_1, x_2, t) \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty[)$ data da

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi c} \int_{r < ct} \frac{f(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} d\mathcal{L}^2(y_1, y_2) \right] + \frac{1}{2\pi c} \int_{r < ct} \frac{g(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} d\mathcal{L}^2(y_1, y_2)$$

(formula di Poisson)

dove $r = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$.

Osservazione 12.7.2. Nel caso $N = 2$ il **dominio di dipendenza** (dai dati iniziali) per la soluzione nel punto (x_1, x_2, t) consiste nel **cerchio di centro x e raggio ct** nel piano (y_1, y_2) . Pertanto il principio di Huygens non vale in due dimensioni (i disturbi (ondosi) continuano ad avere effetto indefinitivamente, come mostrano le onde d'acqua).

In generale si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema 12.7.3.

(i) Se $N \geq 3$, N dispari, $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}^N)$ e $g \in C^m(\mathbb{R}^N)$ dove $m = \frac{N+1}{2}$, allora

$$u(x, t) = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (N-2) \cdot N \cdot \omega_N} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(t^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-3}{2}} \left(t^{N-2} \int_{|\xi|=1} f(x + ct\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \right) + \left(t^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-3}{2}} \left(t^{N-2} \int_{|\xi|=1} g(x + ct\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \right) \right]$$

è l'unica soluzione di classe $C^2(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \square u(x, t) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u(x, 0) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

(ii) Se $N \geq 2$, N pari, $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}^N)$ e $g \in C^m(\mathbb{R}^N)$ dove $m = \frac{N+2}{2}$, allora

$$u(x, t) = \frac{2}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (N-1) \cdot (N+1) \cdot \omega_{N+1}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(t^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(t^{N-1} \int_{|y|<1} \frac{f(x+cty)}{\sqrt{1-|y|^2}} d\mathcal{L}^N(y) \right) + \left(t^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-2}{2}} \left(t^{N-1} \int_{|y|<1} \frac{g(x+cty)}{\sqrt{1-|y|^2}} d\mathcal{L}^N(y) \right) \right]$$

è l'unica soluzione di classe $C^2(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \square u(x, t) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u(x, 0) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

12.8 Il Problema di Cauchy non-omogeneo per l'equazione delle onde: Principio di Duhamel

Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione delle onde **non-omogenea**

$$\begin{cases} \square u(x, t) := u_{tt} - c^2 \Delta_x u = w(x, t) & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u(x, 0) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (N = 1, 2, 3) \quad (P_w)$$

dove

$$\text{se } N = 1, \quad f \in C^2(\mathbb{R}), \quad g \in C^1(\mathbb{R}) \quad \text{e } w \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[),$$

$$\text{se } N = 2, 3, \quad f \in C^3(\mathbb{R}^N), g \in C^2(\mathbb{R}^N) \quad \text{e } w \in C^2(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[).$$

Il principio di Duhamel consente la riduzione del problema non-omogeneo (P_w) a una famiglia di problemi per l'equazione delle onde omogenea.

Precisamente si ha:

Teorema 12.8.1. *Nelle precedenti ipotesi poste per f, g e w ($N = 1, 2, 3$), il problema di Cauchy non-omogeneo (P_w) ha un'unica soluzione di classe $C^2(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$ data da*

$$u(x, t) = u^1(x, t) + \int_0^t v(x, t-s; s) d\mathcal{L}^1(s),$$

dove u^1 è l'unica soluzione di classe $C^2(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$ del problema

$$\begin{cases} \square u^1(x, t) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u^1(x, 0) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u_t^1(x, 0) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

e $v(x, t; s)$ per ogni $s \geq 0$ è l'unica soluzione di classe $C^2(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$ del problema

$$\begin{cases} v_{tt}(x, t; s) - c^2 \Delta_x v(x, t; s) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ v(x, 0; s) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \\ v_t(x, 0; s) = w(x, s) & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (P_s)$$

Dimostrazione. Essendo il problema lineare, è sufficiente provare che posto

$$u^2(x, t) = \int_0^t v(x, t - s; s) d\mathcal{L}^1(s),$$

dove $v(x, t; s)$ è l'unica soluzione di (P_s) , u^2 è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt}^2 - c^2 \Delta_x u^2 = w(x, t) & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u^2(x, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u_t^2(x, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} u^2(x, 0) &= 0; \\ u_t^2(x, t) &= \int_0^t v_t(x, t - s; s) d\mathcal{L}^1(s) + \underbrace{v(x, 0; s)}_{=0} \\ u_t^2(x, 0) &= 0; \\ u_{tt}^2(x, t) &= \int_0^t v_{tt}(x, t - s; s) d\mathcal{L}^1(s) + \underbrace{v_t(x, 0; t)}_{=w(x, t)} \\ &= \int_0^t v_{tt}(x, t - s; s) d\mathcal{L}^1(s) + w(x, t); \\ u_{tt}^2 - c^2 \Delta_x u^2 &= \int_0^t v_{tt}(x, t - s; s) d\mathcal{L}^1(s) + w(x, t) - c^2 \int_0^t \Delta_x v(x, t - s; s) d\mathcal{L}^1(s) \\ &= \int_0^t \underbrace{[v_{tt}(x, t - s; s) - c^2 \Delta_x v(x, t - s; s)]}_{=0} d\mathcal{L}^1(s) + w(x, t) \\ &= w(x, t). \end{aligned}$$

□

12.9 Metodi dell'integrale dell'energia

Definizione 12.9.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $T > 0$. Si definisce energia dell'onda u in Ω al tempo t l'integrale

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(u_t^2(x, t) + c^2 |\nabla_x u(x, t)|^2 \right) d\mathcal{L}^N(x) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (12.9)$$

Teorema 12.9.2. (Unicità)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e limitato, con frontiera regolare; sia $\Omega_T = \Omega \times]0, T]$, $\Gamma_T = \overline{\Omega}_T \setminus \Omega_T$, con $T > 0$.

Allora esiste al più una funzione $u \in C^2(\overline{\Omega}_T)$ che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta_x u = w(x, t) & \text{in } \Omega_T \\ u(x, 0) = f(x) & \text{su } \Gamma_T \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{su } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (P_w)$$

Dimostrazione. Supponiamo che \tilde{u} sia un'altra soluzione; per la linearità del problema, $v := u - \tilde{u}$ è soluzione di

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 \Delta_x v = 0 & \text{in } \Omega_T \\ v(x, 0) = 0 & \text{su } \Gamma_T \\ v_t(x, 0) = 0 & \text{su } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (12.10)$$

Calcoliamo la derivata prima rispetto al tempo di (12.9) (scritta per v), ottenendo

$$\frac{d}{dt}e(t) = \int_{\Omega} (v_t v_{tt} + c^2 \nabla_x v \cdot \nabla_x v_t) d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\Omega} v_t (v_{tt} - c^2 \Delta_x v) d\mathcal{L}^N(x) = 0.$$

Non c'è termine di frontiera perché $v = 0$ su Γ_T , e quindi $v_t = 0$ su $\partial\Omega \times [0, T]$. Pertanto, per ogni $0 \leq t \leq T$, risulta $e(t) = e(0) = 0$, e quindi $v_t = 0$ e $\nabla_x v = 0$ su Ω_T . Dal momento che $v_t = 0$ su $\Omega \times \{t = 0\}$, allora $v = 0$ in Ω_T , ovvero $u = \tilde{u}$ in Ω_T . \square

Per quanto riguarda ancora il **dominio di dipendenza** delle soluzioni dell'equazione delle onde dimostriamo il seguente risultato col metodo dell'energia.

Teorema 12.9.3. (*Velocità finita di propagazione*)

Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[)$ soluzione di $u_{tt} - c^2 \Delta_x u = 0$ e siano $x^0 \in \mathbb{R}^N$, $t_0 > 0$.

Se $u \equiv u_t \equiv 0$ su $B_{ct_0}(x^0) \times \{t = 0\}$ allora $u \equiv 0$ sul cono

$$C = \{(x, t); 0 \leq t \leq t_0, |x - x^0| \leq c(t_0 - t)\}.$$

In particolare un "disturbo" originatosi fuori di $B_{ct_0}(x^0)$ non ha effetto sulla soluzione in C , e di conseguenza ha velocità di propagazione finita (cfr. quanto detto in proposito nell'Osservazione 12.6.2 (ii) e nell'Osservazione 12.7.2).

Dimostrazione. Consideriamo, per $0 \leq t < t_0$, l'integrale dell'energia dell'onda u sulla palla $B(t) := B_{c(t_0-t)}(x^0)$

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{B(t)} \left(u_t^2(x, t) + c^2 |\nabla_x u(x, t)|^2 \right) d\mathcal{L}^N(x) \quad (12.11)$$

che possiamo anche esprimere come

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_0^{c(t_0-t)} d\mathcal{L}^1(r) \int_{\partial B_r(x^0)} \left(u_t^2(\xi, t) + c^2 |\nabla_x u(\xi, t)|^2 \right) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi).$$

Derivando rispetto al tempo risulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e(t) &= \int_{B(t)} (u_t u_{tt} + c^2 \nabla_x u \cdot \nabla_x u_t) d\mathcal{L}^N(x) - \frac{c}{2} \int_{\partial B(t)} (u_t^2 + c^2 |\nabla_x u|^2) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\ &\quad \text{(per la I identità di Green, Teorema 1.10.1)} \\ &= \int_{B(t)} u_t (u_{tt} - c^2 \Delta_x u) d\mathcal{L}^N(x) + \int_{\partial B(t)} c^2 u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\ &\quad - \frac{c}{2} \int_{\partial B(t)} (u_t^2 + c^2 |\nabla_x u|^2) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\ &\quad \text{(per ipotesi } u \text{ è soluzione dell'equazione } u_{tt} - c^2 \Delta_x u = 0) \\ &= c \int_{\partial B(t)} \left(c u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} c^2 |\nabla_x u|^2 \right) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi). \end{aligned}$$

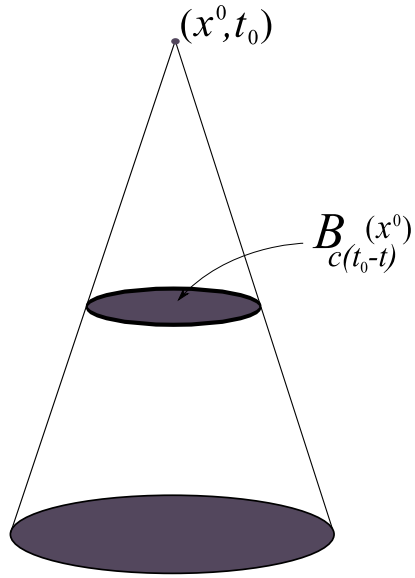


Figura 12.1: Cono di luce

Dalle maggiorazioni

$$c \left| u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| \leq c |u_t| |\nabla_x u| \leq \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{c^2}{2} |\nabla_x u|^2$$

deduciamo che $\frac{d}{dt}e(t) \leq 0$ e quindi $e(t) \leq e(0)$ per $0 \leq t \leq t_0$. Osservato che $e(0) = 0$ (dalle ipotesi su u e dalla (12.11)) si ha $e(t) \leq e(0) = 0$ per $0 \leq t \leq t_0$ e quindi, dalla (12.11), risulta $u_t \equiv 0$ e $\nabla_x u \equiv 0$ da cui segue $u \equiv 0$ in C . \square

Bibliografia

- [1] **H. Brezis:** *Analyse fonctionnelle: Théorie et applications*, Masson, 1983.
- [2] **M. Carriero, L. De Luca:** *Introduzione al Calcolo delle Variazioni*, Quaderni del Dipartimento di Matematica dell'Università del Salento, 1, 2010.
- [3] **R. Courant, D. Hilbert:** *Methods of Mathematical Physics*, Vol.1, Interscience Publishers, New York, 1962.
- [4] **B. Dacorogna:** *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, 1989.
- [5] **E. DiBenedetto:** *Partial Differential Equations*, Birkhäuser, 1995.
- [6] **L.C. Evans:** *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [7] **G. B. Folland:** *Introduction to P.D.E.*, Princeton U.P., 1995.
- [8] **G. Gilardi:** *Analisi tre*, Mc Graw-Hill, 1994.
- [9] **D. Gilbarg, N. S. Trudinger:** *Elliptic P.D.E. of second order*, Springer-Verlag, 1983.
- [10] **E. Giusti:** *Metodi diretti nel Calcolo delle Variazioni*, U.M.I., 1994.
- [11] **F. John:** *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1982.
- [12] **J. Jost, X. Li-Jost:** *Calculus of Variations*, Cambridge University Press, 1998.
- [13] **C.B. Morrey:** *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, New York, 1966.
- [14] **W. Rudin:** *Functional Analysis*, Mc Graw-Hill, 1973.
- [15] **S. Salsa:** *Equazioni a Derivate Parziali. Metodi, modelli e applicazioni*, Springer-Verlag, 2004.

Indice analitico

- Autofrequenze, 191
- Autovibrazioni, 191

- Bordo parabolico, 160

- Carattere, 137
- Caratterizzazione delle funzioni armoniche, 35
- Cilindro parabolico, 160
- Classe di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, 138
- Coefficiente di diffusione, 156
- Condizione al contorno
 - di Dirichlet, 28
- Conservazione dell'energia, 192
- Controesempio di Tychonov, 159

- Decadimento, 199
- Derivati finanziari, 178
- Diametro, 9
- Distanza, 9
- Distribuzione, 60
 - di Dirac, 29, 62
 - di ordine finito, 61
 - temperata, 146
- Disuguaglianza
 - del valor medio, 26
 - di Cauchy-Schwarz, 93
 - di Hölder, 70
 - di Harnack, 39, 40
 - di interpolazione, 73
 - di Minkowski, 72
 - di Morrey, 113
 - di Poincaré in $W^{1,p}(\Omega)$, 116
 - di Poincaré in $W_0^{1,p}(\Omega)$, 115
 - di Sobolev-Poincaré, 116
 - di Young, 70, 80
- Disuguaglianze di Sobolev
 - in $W^{1,p}(\Omega)$, 107
 - in $W_0^{1,p}(\Omega)$, 108

- Dominio di dipendenza, 200, 203
- Duale, 98

- Energia
 - cinetica dell'onda, 191
 - termica, 176
- Equazione
 - del calore, 151
 - delle onde, 187
 - di Black & Scholes, 180
 - di Darboux, 193
 - di Eulero-Poisson-Darboux, 195
 - di Laplace, 23
 - di Poisson, 28
- Equipartizione dell'energia, 191
- Esponente
 - coniugato, 69
 - di Sobolev, 107
- Estremo superiore essenziale, 12

- Formula
 - di Black & Scholes, 182
 - di Parseval, 143
- Formule di Kirchhoff, 197
- Funzione
 - armonica, 23
 - barriera, 47
 - caratteristica, 78
 - di Green, 31
 - di Heaveside, 64
 - essenzialmente limitata, 67
 - hölderiana, 10
 - integrabile, 13
 - misurabile, 12
 - segno, 86
 - semplice, 13
 - sommabile, 13
 - subarmonica, 25
 - superarmonica, 26

- test*, 60
- troncata, 78
- Identità
 - del parallelogramma, 93
 - di Green, 20
 - di Parseval, 144, 145
- Immersione continua, 72
- Integrale
 - di Lebesgue, 13
 - di Poisson, 33
- Intervallo di dipendenza, 189
- Lemma
 - di Caccioppoli-Weyl, 123, 125
 - di du Bois-Reymond, 87
 - di Fatou, 14
 - di Gagliardo, 109
 - di Riemann-Lebesgue, 140
 - di Urysohn, 77
- Medie sferiche, 193
- Metodi dell'integrale dell'energia, 202
- Metodo
 - della discesa di Hadamard, 199
 - di Poisson delle medie sferiche, 194
 - variazionale per operatori in forma di divergenza, 129
- Misura
 - di Lebesgue in \mathbb{R}^N , 11
 - di Hausdorff, 18
- Mollificatore, 82
- Movimenti di una corda, 190
- Multi-indice, 10, 126
- Norma di Hilbert, 93
- Nucleo
 - di Gauss-Weierstrass (o del calore), 152, 157
 - di Poisson, 33
- Obiezione
 - di Courant, 118
 - di Hadamard, 119
 - di Weierstrass, 117
- Operatore
 - di Laplace, 18
 - differenziale a coefficienti costanti, 64
 - Divergenza, 18
 - Gradiente, 18
 - in forma di divergenza, 131
 - uniformemente ellittico, 131
- Opzione *call europea*, 178
- Potenziale Newtoniano, 51
- Principio
 - di Dirichlet, 117
 - di Dirichlet in $W^{1,2}(\Omega)$, 121
 - di Duhamel, 201
 - di Huygens, 199
 - di riflessione di Schwarz, 38
- Principio del massimo
 - per l'operatore del calore, 160, 161, 166
 - per le funzioni subarmoniche, 26, 27, 44
- Problema di Cauchy per l'equazione del calore
 - in \mathbb{R}^N , 151
 - in aperti connessi limitati, 162, 175
 - retrogrado, 155, 176
- Problema di Cauchy per l'equazione delle onde
 - in dimensione (spaziale) $N = 2$, 199
 - in dimensione (spaziale) $N = 3$, 196
 - unidimensionale, 187
- Problema di Dirichlet
 - non-omogeneo per l'equazione di Poisson, 135
 - omogeneo per l'equazione di Poisson, 129
 - per l'equazione di Laplace, 28, 49
 - per l'equazione di Poisson, 28
- Prodotto di convoluzione
 - di due distribuzioni, 89
 - di due funzioni, 80
 - di una distribuzione per una funzione, 88
- Prodotto scalare
 - in \mathbb{R}^N , 9
 - in L^2 , 94
 - in $W^{1,2}$, 94
 - in $W_0^{1,2}$, 94
 - in uno spazio di Hilbert (reale), 94
 - su uno spazio vettoriale, 93
- Proiezione, 97
- Proprietà
 - del valor medio, *vedi* Teorema del valor medio
 - della palla esterna, 50

- Rappresentazione di Green, 30
- Sollevamento armonico, 44
- Soluzione debole, 130, 131
- Soluzione fondamentale, 64
 - per l'operatore del calore, 152, 157
 - per l'operatore di Laplace, 29
- Spazio
 - di Lebesgue $L^p(\Omega)$, 67
 - di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, 103
 - di Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, 106
 - normale, 77
 - separabile, 18
- Successione
 - equicontinua, 16
 - equilimitata, 16
 - regolarizzante, 82
- Supporto
 - di una distribuzione, 88
 - di una funzione, 10, 80
- Teorema
 - del massimo modulo, 27
 - del valor medio per le funzioni armoniche, 24
 - della divergenza (di Gauss-Green), 19
 - della proiezione, 94
 - di approssimazione dell'identità, 82
 - di Ascoli-Arzelà, 16, 43
 - di Beppo Levi o della convergenza monotona, 14
 - di compattezza per successioni di funzioni armoniche, 43
 - di completezza, 68
 - di densità (di Friedrichs), 105
 - di densità, 84
 - di differenziazione di Lebesgue, 15
 - di Fisher-Riesz, 75
 - di Fubini, 15
 - di immersione compatta (di Rellich-Kondrachov), 107
 - di integrazione per parti, 19
 - di inversione della trasformata di Fourier, 142
 - di Lax-Milgram, 101
 - di Lebesgue o della convergenza dominata, 14
 - di Liouville, 41, 43
 - di Malgrange-Ehrenpreis, 65
 - di Plancherel, 145
 - di rappresentazione (di Riesz-Fréchet), 98
 - di regolarità del prodotto di convoluzione, 81
 - di Stampacchia, 100
- Trasformata di Fourier
 - della funzione gaussiana, 140
 - in $L^1(\mathbb{R}^N)$, 137
 - in $L^2(\mathbb{R}^N)$, 144
- Uguaglianza del valor medio, *vedi* Teorema del valor medio
- Velocità di propagazione, 156, 203